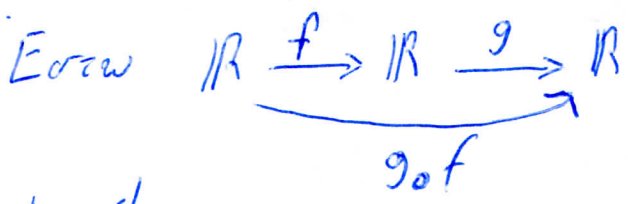


Ανάλυση II - 28/03/2011 - μάθημα 14

Εφαρμογές Διαφορίσισης

- Αλυσίδα Παραγώγισης
- Εφαπτόμενο Επίπεδο (για εσφ. σφαιρική/σφαίρα)
- Θεώρημα Τaylor
- Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων (τέλος του φαι)

• Σύνθεση πραγματικών συναρτήσεων



$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Από το Λήμμα γνωρίζουμε

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Θέλουμε να γενικεύσουμε τον παραπάνω κανόνα για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Έχουμε λοιπόν

για συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\vec{f}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

θα έχουμε τον ακόλουθο πίνακα διαγερτικών.

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω πίνακας είναι ένας $m \times n$ πίνακας

Αν έχουμε την εξής σύνδεση

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^m \\ (t_1, \dots, t_n) & & (x_1, \dots, x_m) \\ & \searrow h=f \circ g & \downarrow f \\ & & \mathbb{R}^e \\ & & (y_1, \dots, y_e) \end{array}$$

Ο πίνακας της παραγώγου της σύνδεσης θα είναι ένας $e \times n$ πίνακας.

Οπότε

$$J(f \circ g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial t_1} & \frac{\partial h_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial t_1} & \frac{\partial h_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_\ell}{\partial t_1} & \dots & \dots & \frac{\partial h_\ell}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

Αντίστοιχα, οι πίνακες διαφορικοί της f και της g θα είναι

για την f ένας $\ell \times m$ πίνακας
και για την g ένας $m \times n$ πίνακας.

$$J(g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \frac{\partial g_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial t_1} & \frac{\partial g_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial t_1} & \frac{\partial g_m}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial t_n} \end{pmatrix}_{t_0}$$

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial x_1} & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{g(t_0)}$$

Διασυντιώνουμε του κανόνα της αλυσίδας

$$\boxed{J(\vec{f} \circ \vec{g})_{\vec{t}_0} = J(\vec{f})_{\vec{g}(\vec{t}_0)} \cdot J(\vec{g})_{\vec{t}_0}}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας διαφορισμού της σύνδεσης των συναρτήσεων g, f προκύπτει ως γινόμενο των επιμέρους πινάκων διαφορισμού.

Έτσι, κάθε στοιχείο του πίνακα διαφορισμού της $f \circ g$ προκύπτει ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \text{στοιχείο } ij & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{i\text{-γραμμή}} & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \dots & \boxed{j\text{-στήλη}} & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

$J(f \circ g)$
 $J(f)$
 $J(g)$

Δηλαδή, κάθε στοιχείο στη θέση ij (i-γραμμή και j-στήλη) του πίνακα διαφ. της $f \circ g$, προκύπτει ως γινόμενο της i-γραμμής του πίνακα διαφ. της f επί την j-στήλη του πίνακα διαφ. της g .

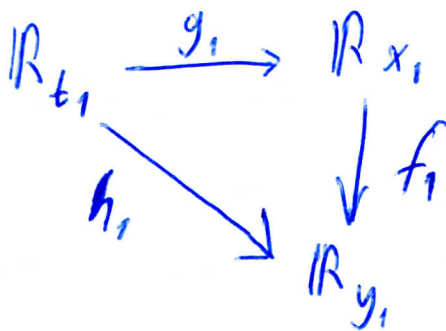
Πιο συγκεκριμένα

$$\frac{\partial h_i}{\partial t_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \frac{\partial g_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial t_j}$$

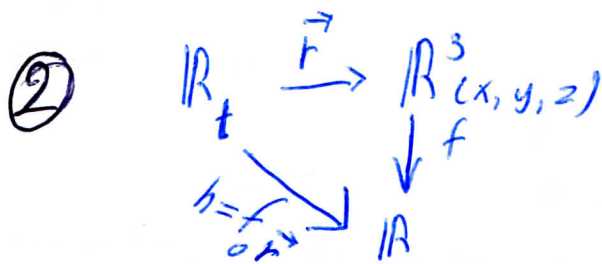
$$i = 1, \dots, l \text{ και } j = 1, \dots, n$$

① Ειδικές περιπτώσεις

① Για $n=m=l=1$



$$\frac{dh_1}{dt_1} = \frac{df_1}{dx_1} \frac{dg_1}{dt_1}$$



$$\left((f \circ \vec{r})' \right) (t_0) = \frac{\partial f}{\partial x} (\vec{r}(t_0)) \cdot x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y} (\vec{r}(t_0)) \cdot y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z} (\vec{r}(t_0)) \cdot z'(t_0)$$

$$\underline{(f \circ \vec{r})'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t).}$$

Εφαρμογή.Θ. Μ. Τ.

(Θεώρημα μέσης τιμής για $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$)

Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, διαγ/μη
και $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

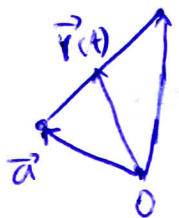
$$\text{Τότε } f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{\xi}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

για κάποιο $\vec{\xi}$ που ανήκει στο ευθύγραμμο
τμήμα που ενώνει τα \vec{a}, \vec{b}

Η απόδειξη βασίζεται στο Θ. Μ. Τ., όπως
το γνωρίζουμε για συναρτήσεις μιας μεταβλητής,
με χρήση του κανόνα της αλυσίδας, όπως αυτός
αναφέρθηκε προηγουμένως.

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα \vec{a}, \vec{b} είναι

$$\vec{r}(t) = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$



Ορίζεται συνεπώς η σύνθεση $g = f \circ \vec{r}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$
με ωςπιο $g(t) = f(\vec{r}(t)) = f((1-t)\vec{a} + t\vec{b})$
 $0 \leq t \leq 1$. Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$g'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \quad (1)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το ΘΜΤ (μιας μεταβλητ

$$g(1) - g(0) = g'(c)(1-0) \Rightarrow f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{r}(c)) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

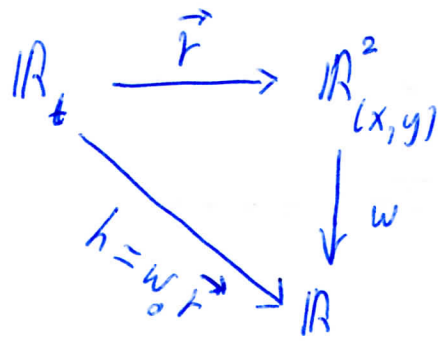
και αρκεί να σταθεί ξουμε $\vec{\xi} = \vec{r}(c)$.

Ασκήσεις

1) $w(x, y) = x \cdot y$, $\vec{r}(t) = (\cos t, \eta \pi t)$

Ποιο είναι το $\frac{d}{dt} (w \circ \vec{r}) = j$

Λύση



$$J(w \circ \vec{r})_{t_0} = J(w)_{\vec{r}(t_0)} \cdot J(\vec{r})_{t_0}$$

$$\nabla_w = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \Rightarrow (w \circ \vec{r})'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x}(\vec{r}(t_0)) & \frac{\partial w}{\partial y}(\vec{r}(t_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} =$$

$$= (\eta \pi t_0 \quad \cos t_0) \begin{pmatrix} -\eta \pi t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix} = -\eta \pi^2 t_0 \cos^2 t_0$$

Επαληθεύω

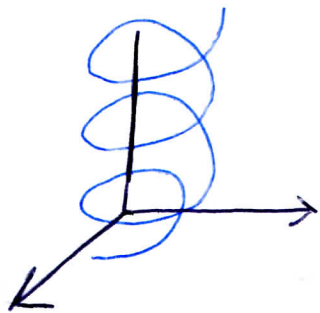
$$(w \circ \vec{r})(t) = w(\cos t, \eta \pi t) = \cos t \cdot \eta \pi t$$

$$\frac{d}{dt} (w \circ \vec{r})(t) = \frac{d}{dt} (\cos t \eta \pi t) = -\eta \pi^2 t + \cos^2 t$$

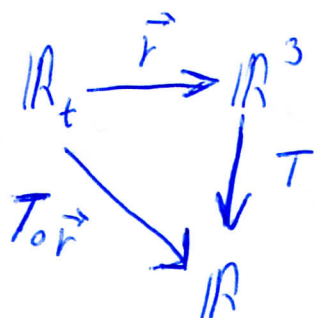
$$2) T(x, y, z) = xyz$$

Έστω έλιμα $\vec{r}(t)$

Να βρειει η μεταβολη της
θερμοκρασιας T επι της \vec{r}



$$\vec{r}(t) = (\cos t, \eta \sin t, t)$$



$$\frac{d}{dt} (T_0 \vec{r}) = j$$

Οι πίνακες των διαφορικων είναι

$$\nabla T(x, y, z) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial T}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, z) \right)$$

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

Οποτε απο τον κανονα της αλυσιδας για
την $T_0 \vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (T_0 \vec{r})(t_0) &= \nabla T(\vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}'(t) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial y} & \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial T}{\partial x} (\vec{r}(t_0)) x'(t_0) + \frac{\partial T}{\partial y} (\vec{r}(t_0)) y'(t_0) + \frac{\partial T}{\partial z} (\vec{r}(t_0)) z'(t_0)$$

$$= (-\eta p t) \eta p t + \omega v t \omega v t + 1 \cdot 1 = \omega v^2 t - \eta p^2 t + 1$$

π.χ. για $t=0$: $\frac{d}{dt} (T \cdot \vec{r})|_0 = 2$

Επαλήθευση: $(T \cdot \vec{r})(t) = T(\vec{r}(t)) =$
 $= x(t)y(t) + z(t) = \omega v t \cdot \eta p t + t,$

οτι οτι

$$\frac{d}{dt} (T \cdot \vec{r})(t) = \frac{d}{dt} (\omega v t \cdot \eta p t + t)$$

$$= \omega v^2 t - \eta p^2 t + 1.$$