Ανάλυση ΙΙ - 18/03/2011 - μάθημα 11

Ασκήσεις

1) Κινητό έχει διαν. θέσης

$\vec{r}(t) = 3\sigma\upsilon\nu t\,\vec{i} + 3\eta\mu t\,\vec{j} + (t^3-3t)\vec{k}$, $t \in [0,+\infty)$

i) Σε ποια επιφάνεια κινείται;

ii) $\vec{r}'$, $\vec{r}''$, $\|\vec{r}'\|$, $\|\vec{r}''\|$ ($\vec{r}'$= ταχύτητα, $\vec{r}''$= επιτάχυνση)

iii) Σε ποιες χρ. στιγμές το διάν. θέσης είναι κάθετο στο διάν. ταχύτητας;

Λύση

i) $\begin{cases} x(t) = 3\sigma\upsilon\nu t \\ y(t) = 3\eta\mu t \\ z(t) = t^3-3t \end{cases}$ $\Big|$ $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=9,\ z \in \mathbb{R}\}$

Το κινητό είναι πάνω στον κύλινδρο (Σχήμα: Μάθημα 01) → σελ.

Κινείται στην S κύλινδρος.

ii) $\vec{r}'(t) = (-3\eta\mu t,\ 3\sigma\upsilon\nu t,\ 3t^2-3)$,

$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{9+9(t^2-1)^2}$

$\vec{r}''(t) = (-3\sigma\upsilon\nu t,\ -3\eta\mu t,\ 6t)$,

$\|\vec{r}''(t)\| = \sqrt{9+36t^2}$

iii) $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t) = 0 \Leftrightarrow (t^2-1)t(t^2-3)=0$

$\Leftrightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 1,\ t_3 = \sqrt{3}$

2) Κινητό έχει διάν. θέσης

$\vec{r}(t) = (e^t συνt, e^t ημt, e^t)$

i) Σε ποια επιφάνεια κινείται;

ii) Να βρεθεί το συνθ, $θ(t) = \measuredangle(\vec{r}(t), \vec{r}'(t))$

Τι παρατηρείτε;

Λύση

i) $x(t) = e^t συνt$
$y(t) = e^t ημt$
$z(t) = e^t$

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, z > 0\}$

Το κινητό είναι πάνω στον κώνο S

(Σχήμα: Μάθημα 01) → σελ. 12)

ii) $συνθ(t) = \dfrac{\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)}{\|\vec{r}(t)\| \, \|\vec{r}'(t)\|}$

$\vec{r}(t) = (e^t συνt, e^t ημt, e^t)$, $\|\vec{r}(t)\| =$
$= \sqrt{e^{2t} συν^2 t + e^{2t} ημ^2 t + e^{2t}} = e^t \sqrt{2}$

$\vec{r}'(t) = (-e^t ημt + e^t συνt, e^t συνt + e^t ημt, e^t)$

$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{e^{2t} + e^{2t} + e^{2t}} = e^{-t}\sqrt{3}$

$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = -e^{2t} συνt\, ημt + e^{2t} συν^2 t + e^{2t} ημt\, συνt + ημ^2 t + e^{2t}$
$= 2e^{2t}$

$συνθ(t) = \dfrac{2e^{2t}}{e^{2t}\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

Άρα η $\measuredangle(\vec{r}(t), \vec{r}'(t))$ είναι σταθερή (ανεξάρτητη του χρόνου)

3) Κινητό έχει διάνυσμα θέσης

$\vec{r}(t) = (\eta\mu t,\ \eta\mu t,\ \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu t)$, $t \in \mathbb{R}$

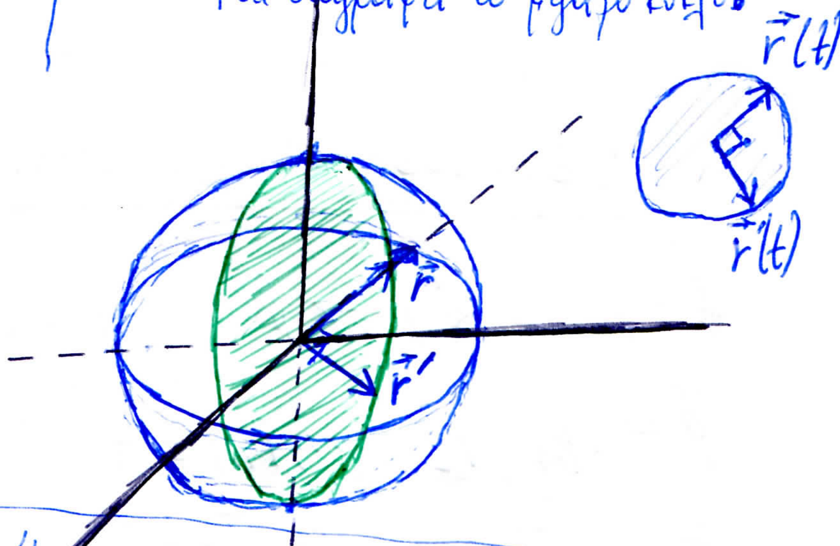
(i) Σε ποια επιφάνεια κινείται;

(ii) Να αποδειχθεί ότι $\vec{r}(t) \perp \vec{r}\,'(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Λύση

(i) $\begin{cases} x(t) = \eta\mu t \\ y(t) = \eta\mu t \\ z(t) = \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu t \end{cases}$ $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$

Το κινητό είναι πάνω στην σφαίρα και διαγράφει το μέγιστο κύκλο.



(ii) $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0$

$\forall t \in \mathbb{R}$

(Πράξεις → στον αναγνώστη)

Παρατηρούμε ότι όταν κινούμαστε πάνω σε σφαίρα το δ. θέσης και το δ. ταχύτητας είν[αι] κάθετα. Ισχύει γεν[ικά]

4) $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n$, $(c>0)$. Τότε

$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0 \ \forall t \in I$

$\iff \|\vec{r}(t)\| = c \ \forall t \in I$

(δηλ. κινούμαστε σε σφαίρα ακτίνας c (>0) κέντρου $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$)

αν και μόνον αν τα διαν. θέσης και ταχύτητας είναι κά[θετα]

Λύση (4)

$\|\vec{r}(t)\| = c, \ t \in I \iff \|\vec{r}(t)\|^2 = c^2 \ t \in I$

$\iff \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = c^2, \ t \in I$

$\iff (\vec{r} \cdot \vec{r})'(t) = 0, \ t \in I$

$\iff \vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0, \ t \in I$

$\iff 2\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0 \ t \in I$

$\iff \vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0 \ t \in I$

Μερικές παράγωγοι $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \boxed{\mathbb{R}}$

$f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $A =$ ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$

$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in A$

Εάν $\exists \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\vec{p} + t\vec{e}_i) - f(\vec{p})}{t}$ συμβολίζεται

$= \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p}) \ (ή \ f_i(\vec{p}) \ ή \ f_{x_i}(\vec{p}))$, $(1 \leq i \leq n)$

καλείται μερική παράγωγος της f στο $\vec{p}$ ως προς την μεταβλητή x_i (ή i-μερική παράγωγος)

Αναλυτικά:

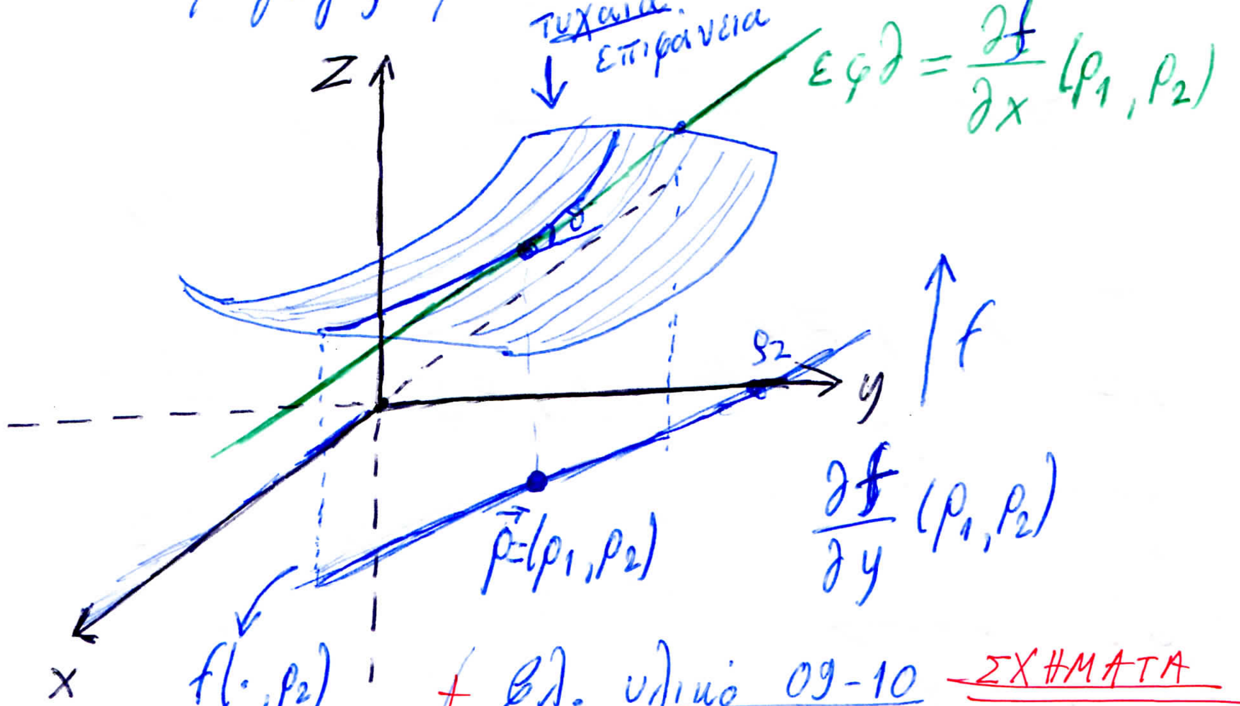
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_n) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(\rho_1+t,\rho_2,\rho_3,\dots,\rho_n)-f(\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_n)}{t}$$

(Ανάλογα $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\rho_1,\dots,\rho_n)$) $\quad (t\in I)$
$i=2,\dots,n.$

δηλ. σταθεροποιούμε τις μεταβλητές $x_2=\rho_2,\dots x_n=\rho_n$ και παραγωγίζουμε ως προς την πρώτη στο ρ_1

Γεωμετρικά ή θεωρούμε την ευθεία $\vec{\ell}(t)=\vec{\rho}+t\vec{e}_1$, $(t\in\mathbb{R})$ περιορίζουμε την f πάνω στην ευθεία και παραγωγίζουμε.



(βλ. υλικό 09-10 ΣΧΗΜΑΤΑ
→ εργασία φοιτητή (Ναβίτ Κων/νου)
05)

Σχέση μερικής παραγώγισης και συνέχειας

- $f =$ συνεχής $\not\Rightarrow \exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p})$

π.χ. $f(x,y) = |x|$ στο $(0,0)$

$\nexists$ παράγωγος ως προς x / $f =$ συνεχής.

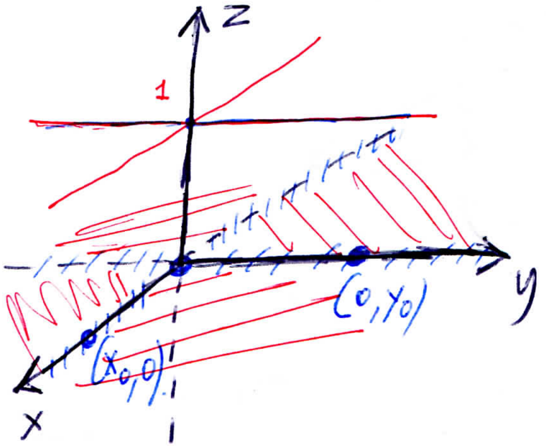
- Εάν $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p})$, $i = 1, \dots, n$, $(n \geq 2)$

$\not\Rightarrow$ η f είναι συνεχής στο $\vec{p}$.

π.χ. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Ασυνεχής στο $(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

π.χ. $g(x,y) = \begin{cases} 1, & xy = 0 \\ 0, & xy \neq 0 \end{cases}$ Ασυνεχής



$\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial g(0,0)}{\partial y}$

(Η g είναι ασυνεχής και στα $(0,y_0)$, y_0… και στα $(x_0,0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. $\dfrac{\partial g(0,y_0)}{\partial y} = 0$
$\dfrac{\partial g(x_0,0)}{\partial x} = 0$

1-1-4

Ασκήσεις

1) $f(x,y,z) = x^2y^2 + e^z συν(xy) +$
$+ xy^2z + τοξεφ(xy) + \log(x^4+1)$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ στο σημείο $(1, 2, 3)$

Έχουμε:

$f(x,2,3) = x^2 \cdot 2^2 + e^3 συν(2x) + x \cdot 2^2 \cdot 3 + τοξεφ(2x) + \log(x^4+1)$

και θέλουμε την παράγωγο για $\underline{x=1}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3) = 2\cdot 1\cdot 2^2 + e^3 \cdot 2(-ημ2) + 1\cdot 2^2 \cdot 3 + \frac{2}{1+2^2} + 4\cdot 1 \frac{1}{1^4+1}$$

όμοια τα υπόλοιπα // (Να γίνουν στο σπίτι!)

2) $f(x,y) = x^5y^2 + e^{xy} συν y + \log(x^2+2y^2+1) +$
$+ τοξεφ\left(\frac{x}{y}\right)$

Να υπολογιστούν $\frac{\partial f}{\partial x}(2,5)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,5)$

... λύνουμε μόνοι μας σπίτι