Ανάλυση ΙΙ - 16/03/2011 - μάθημα 10

Διαφόριση: Διαφορικό / Γραμμικοποίηση

Γενικά

Εάν έχουμε συνάρτηση
$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ και θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή $f(x)$ για κάποιο $x_0 \in (a,b)$ αυτό γενικά είναι αδύνατον!

(π.χ. $f(x) = $ ημ.x, συνx, a^x, $\ln(x)$, ...)

Οι μόνες συναρτήσεις που μπορούν να βοηθήσουν είναι οι πολυωνυμικές
$P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ $(a_i \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{Q})$

Άρα για να προσεγγίσουμε το $f(x_0)$ (f = συνάρτηση, τυχαία) πρέπει να "πλησιάσουμε" την f με πολυώνυμο.

Εάν χρησιμοποιήσουμε πολ. 1ου βαθμού, ορίζουμε το διαφορικό της f.

Εάν χρησιμοποιήσουμε πολ. $\geq$ 2ου βαθμού, ορίζουμε το πολυώνυμο του Taylor (f = "καλή" συνάρτηση)

• Πως προσεγγίζουμε την f στο $x = x_0$ με πολ. 1ου βαθμού.

Έστω $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

$$\Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists\, u_{x_0}(h) = f'(x_0)h,\ h \in \mathbb{R} \text{ γραμμική} \\ g(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-u_{x_0}(h)}{|h|}, & h \neq 0, \\ 0, & h = 0 \end{cases} \end{cases}$$

με $\lim_{h\to 0} g(h) = 0 = g(0)$

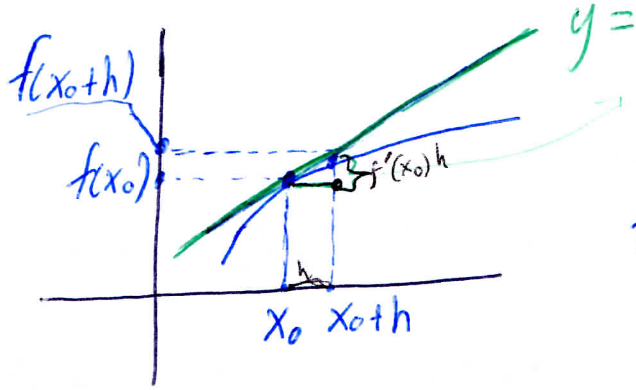
$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(x_0+h) = f(x_0) + u_{x_0}(h) + |h|\, g(h) \\ u_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ γραμμική} \\ \text{και } \lim_{h\to 0} g(h) = 0 = g(0) \end{array}}$$

Την (συνάρτηση) $u_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γραμμική ($u_{x_0}(x) = f'(x_0)x,\ x \in \mathbb{R}$) καλούμε <u>διαφορικό της f στο x_0</u>, $df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$df(x_0)(x) = f'(x_0)x,\ x \in \mathbb{R}$

Παραδείγματα

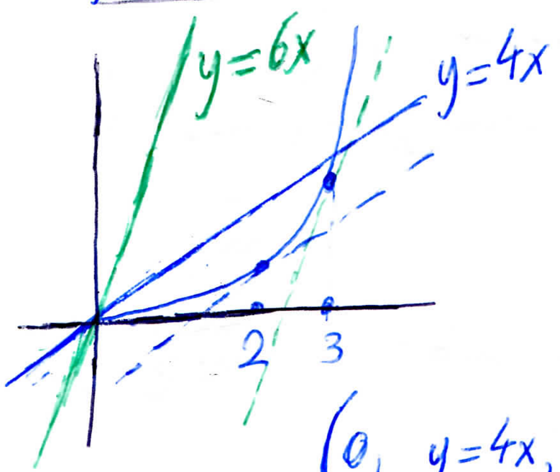
1) Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$.



$$f(x_0+h) \cong f(x_0) + f'(x_0)h$$

$$h \cong 0$$

2) $f(x) = x^2$



$df(2)$, $df(3)$;

$$df(2)(x) = 4x$$
$$df(3)(x) = 6x \quad x \in \mathbb{R}$$

(Οι $y=4x$, $y=6x$ είναι παράλληλες με τις εφαπτόμενες στα σημεία 2 και 3 αντίστοιχα)

Σημείωση: Το σφάλμα $|h|\,q(h)$ να δοθεί (εκτίμηση) από τον Τύπο του Taylor (αν $\exists f''$)

Σημ: Για να ορίσουμε την συνάρτηση του διαφορικού (που είναι γρ
πρέπει να μελετήσουμε τις γραμμικές συναρτήσεις

Γραμμικές συναρτήσεις

(ή ισοδ. γραμμικές απεικονίσεις)

Έστω $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

τότε

$\vec{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{u}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{u}(\vec{x}) + \vec{u}(\vec{y}), \ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \\ \vec{u}(\lambda \vec{x}) = \lambda \vec{u}(\vec{x}), \ \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Ισχύει: (1) $\vec{u}$ γραμμική συνάρτηση

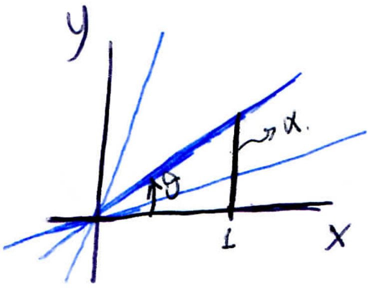
  $\Longleftrightarrow u_1, u_2, \ldots u_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικές

  (2) $\vec{u}(\vec{0}) = \vec{0}$

- Πως είναι οι Γρ. Συναρτήσεις $\vec{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \geq 1)$

- $n = 1, m = 1$: $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γραμμική

  $\Longleftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{R} : u(x) = ax, \ x \in \mathbb{R}$



$u(1) = a \in \mathbb{R}$

$u(x) = u(x \cdot 1) = x\, u(1) = ax$

$u(1) = a = u'(1)$

$(\alpha = \varepsilon\varphi\vartheta)$

- $n \geq 2,\ m = 1$

$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γραμμική $\iff \exists\, \vec{a} \in \mathbb{R}^n : u(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x},\ x \in \mathbb{R}^n$

($\Leftarrow$) $u(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) =$

$= \lambda\, \vec{a} \cdot \vec{x} + \mu\, \vec{a} \cdot \vec{y} = \lambda u(\vec{x}) + \mu u(\vec{y}),\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

($\Rightarrow$) $\vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n,$

$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0),\ \vec{e}_i = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{θέση } i}}{1}, 0, \dots, 0),$

$\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$

Τότε $\vec{u}(\vec{x}) = x_1 u(\vec{e}_1) + x_2 u(\vec{e}_2) + \dots + x_n u(\vec{e}_n),$

Θέτουμε $\vec{a} = (u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$

$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$

- $n \geq 2,\ m \geq 2$

$\vec{u}(\vec{x}) = (u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), \dots, u_m(\vec{x}))$ ($u_i =$ γραμ $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

$\overset{(*)}{=} (\vec{a}_1 \cdot \vec{x},\ \vec{a}_2 \cdot \vec{x}, \dots, \vec{a}_m \cdot \vec{x})$

$= (a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{n1} x_n, \dots$

$\dots, a_{1m} x_1 + a_{2m} x_2 + \dots + a_{nm} x_n)$

$$\vec{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$$

$$\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & & \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

δηλαδή

$$\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u_1(\vec{e}_1) & u_1(\vec{e}_2) \dots & \vec{u}_1(\vec{e}_n) \\ \vdots & & \\ u_m(\vec{e}_1) & u_m(\vec{e}_2) \dots & \vec{u}(\vec{e}_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\forall$ $\vec{u}$ = γραμμική, αντιστοιχεί ένας πίνακας και αντίστροφα.

$(n \geq 2,\ m = 1,\ u_j(\vec{x}) = \vec{a}_j \cdot \vec{x},\ u_j(\vec{e}_i) = a_{ij} \quad *)$

Π.χ. • Εάν $\vec{u}(x,y,z) = (x+y,\ 2x+5z,\ 9x+10y+11z)$ (γραμμικ
ο Πίνακας που αντιστοιχεί είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

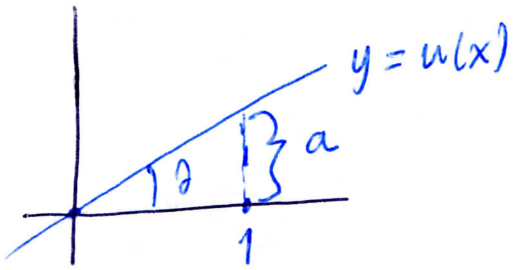
• Εάν $\vec{u}(x,y) = (14x,\ 18x+y,\ 13y)$
ο Πίνακας που αντιστοιχεί είναι ο $\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 18 & 1 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στα στοιχεία του πίνακα γραμμικής απεικ. είναι ΑΡΙΘΜΟ

Παραδείγματα

$u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γραμμική $\quad u(x) = ax$

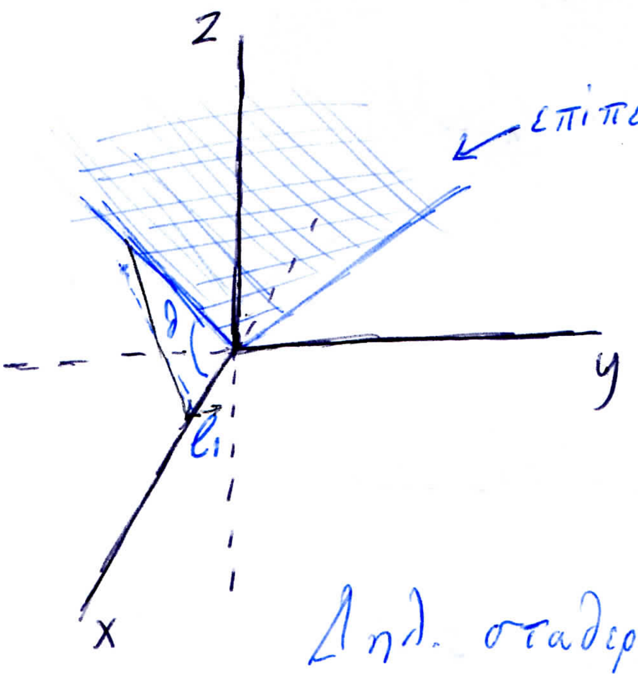
$u(1) = a = u'(x)$ $(= \varepsilon\varphi\theta)$



Πίνακας που αντ. (a)

$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$u(x, y) = (a, b) \cdot (x, y) = ax + by$



επίπεδο που περνά από το $(0,0,0)$

"Βρίσκουμε την κλίση του επιπέδου" (κατά κάποιον τρόπο) ως προς τον κάθε άξονα x, y χωριστά.

Δηλ. σταθεροποιούμε μία το x και μία το y

$u(1,0) = a = u_x(x_0, 0) \quad (u(x,0): \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

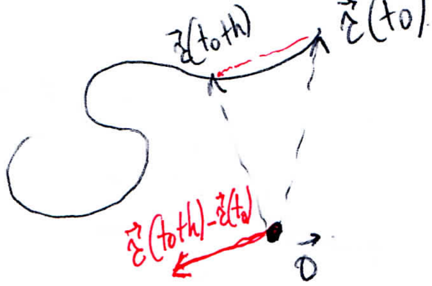
$u(0,1) = b = u_y(0, y_0) \quad (u(0,y): \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

$u(x,y) = u_x(x_0, 0)\, x + u_y(0, y_0)\, y$

Παράγωγος $\vec{r} : I\,(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$, I = διάστημα.

Εάν $\exists \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)}{h}$ και λέγεται

$\vec{r}\,'(t_0)$, $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$



Ισχύουν : 1) $\vec{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$, $t_0 \in I$

Τα Εξής Είναι Ισοδύναμα : (a) $\exists\, \vec{r}\,'(t_0)$

(β) $\exists\, r_i'(t_0)$, $i = 1, \dots, n$

Τότε $\boxed{\vec{r}\,'(t_0) = (r_1'(t_0), \dots, r_n'(t_0))}$

$\vec{r}\,'$ = ταχύτητα $(\vec{v})$

$\vec{r}\,''$ = επιτάχυνση $(\vec{a})$

2) $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)'(t_0) = \vec{r}_1'(t_0) + \vec{r}_2'(t_0)$

3) $(\lambda \vec{r})'(t_0) = \lambda \vec{r}\,'(t_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

4) $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)'(t_0) = \vec{r}_1'(t_0) \cdot \vec{r}_2(t_0) + \vec{r}(t_0) \cdot \vec{r}_2'(t_0)$

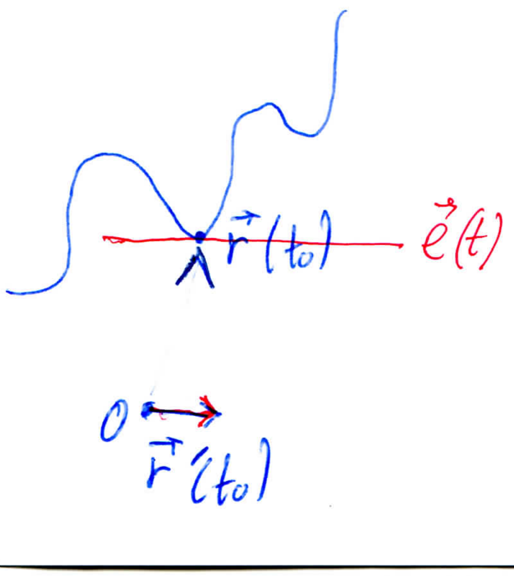
5) $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)'(t_0) = \vec{r}_1'(t_0) \times \vec{r}_2(t_0) + \vec{r}_1(t_0) \times \vec{r}_2'(t_0)$

(προσοχή δεν μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά)

<u>Σημείωση</u>: Εάν $\exists\ \vec{r}\,'(t_0) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \vec{r}$ = συνεχής στο t_0

$(\vec{r}(t) = (|t|, 1)$, $\nexists$ παρ. $t_0 = 0$ ή $\vec{r}$ = συνεχής ή $\vec{r}(t_0))$

<u>Εφ. ευθεία της $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$ στο t_0</u>
<u>ή γραμμικοποίηση της $\vec{r}$ στο t_0</u>



$$\vec{\ell}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)\, t,$$

$t \in \mathbb{R}$ (αν $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$)

(Ευθεία που περνά από το $\vec{r}(t_0)$ και είναι $\parallel \vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$)