Ανάλυση ΙΙ - 21/03/2011 - μάθημα 12

Διαφόριση / Γραμμικοποίηση $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$

Θεωρούμε συνάρτηση $\vec{f}$ και $\vec{p}$ σταθερό

$\vec{f}: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, $\vec{p} \in A$ (A ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^n$)

Η $\vec{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{p}$

$\Longleftrightarrow$ αν υπάρχει $\vec{u}_{\vec{p}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Γραμμική Συνάρτηση

ώστε
$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{p}+\vec{h}) - f(\vec{p}) - \vec{u}_{\vec{p}}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$$

Εάν $\exists$ $\vec{u}_{\vec{p}}$ είναι μοναδική,

συμβολίζουμε $\vec{u}_{\vec{p}} = \boxed{d\vec{f}(\vec{p})}$ (ή $D_1\vec{f}(\vec{p})$ ή $d_1\vec{f}(\vec{p})$)

και καλείται διαφορικό της $\vec{f}$ στο $\vec{p}$

Ισοδύναμα $\vec{f}(\vec{p}+\vec{h}) = \vec{f}(\vec{p}) + d\vec{f}(\vec{p})(\vec{h}) + \underbrace{\|\vec{h}\|\vec{q}(\vec{h})}_{\text{σφάλμα της γραμμικοποίησης}}$

με $\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \vec{q}(\vec{h}) = \vec{0} = \vec{q}(\vec{0})$

Την $L(\vec{p}+\vec{h}) = \vec{f}(\vec{p}) + d\vec{f}(\vec{p})(\vec{h})$, $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$

καλούμε <u>Γραμμικοποίηση της $\vec{f}$ στο $\vec{p}$</u>

<u>Ιδιότητες / Αλγεβρικές</u>

$\vec{f}, \vec{g} : A \, (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, $\vec{p} \in A$

Έστω $\exists \; d\vec{f}(\vec{p}), \, d\vec{g}(\vec{p})$. <u>Τότε</u>:

i) $d(\vec{f}+\vec{g})(\vec{p}) = d\vec{f}(\vec{p}) + d\vec{g}(\vec{p})$

ii) $d(\lambda \vec{f})(\vec{p}) = \lambda \, d\vec{f}(\vec{p})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

• <u>Κανόνας της Αλυσιδωτής παραγώγισης</u>
(κανόνας Αλυσίδας ή διαφορ. σύνθεσης συναρτήσεων)

$$\begin{tikzcd} A(\subseteq \mathbb{R}^n) \arrow[r, "\vec{f}"] \arrow[dr, "\vec{g}\circ\vec{f}"'] & B(\subseteq \mathbb{R}^m) \arrow[d, "\vec{g}"] \\ & \mathbb{R}^{\ell} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "d\vec{f}(\vec{p})"] \arrow[dr, "d(\vec{g}\circ\vec{f})(\vec{p})"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "d\vec{g}(\vec{f}(\vec{p}))"] \\ & \mathbb{R}^{\ell} \end{tikzcd}$$

$\exists \; d\vec{f}(\vec{p})$, $\exists \; d\vec{g}(\vec{f}(\vec{p}))$

Τότε $\underline{d(\vec{g}\circ\vec{f})(\vec{p}) = d\vec{g}(\vec{f}(\vec{p}))\circ d\vec{f}(\vec{p})}$

ο πίνακας

$$d(\vec{g}\circ\vec{f})(\vec{p}) = \underbrace{\text{πιν}\left(d\vec{g}(\vec{f}(\vec{p}))\right)\cdot \text{πιν}\left(d\vec{f}(\vec{p})\right)}_{\text{γινόμενο πινάκων.}}$$

Ιδιότητες / Αναλυτικές

1) $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$

$f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$

$\vec{p} \in A$. Τα Εξής Είναι Ισοδύναμα:

(α) $\exists\ d\vec{f}(\vec{p})$, (β) $\exists\ df_1(\vec{p}), \dots, df_m(\vec{p})$

Τότε $\boxed{d\vec{f}(\vec{p}) = (df_1(\vec{p}), \dots, df_m(\vec{p}))}$

2) $f : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ και $\exists\ df(\vec{p})$

Τότε $df(\vec{p})(\vec{e}_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p})$, $i = 1, \dots, n$

Απόδειξη (του (2)) (δεν εξετάζεται)

$$\vec{h} = t\vec{e}_1$$

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{p}+\vec{h}) - f(\vec{p}) - df(\vec{p})(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{p}+t\vec{e}_1) - f(\vec{p}) - \overbrace{df(\vec{p})(t\vec{e}_1)}^{=t\,df(\vec{p})(\vec{e}_1)}}{t} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\left[\frac{f(\vec{p}+t\vec{e}_1) - f(\vec{p})}{t} - df(\vec{p})(\vec{e}_1)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \exists\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{p}) = df(\vec{p})(\vec{e}_1)$$

Κριτήρια ύπαρξης διαφ. $df(\vec{p})$

(A) $f : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p})$, $(i=1,\dots,n)$

Ορίζουμε (διάνυσμα)

συμβολ: $\nabla f(\vec{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(\vec{p})$

και ονομάζουμε Ανάδελτα/κλίση της f στο $\vec{p}$

Τ.Ε.Ε.1.

α) $\exists\ df(\vec{p}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

β) $\exists \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \dfrac{f(\vec{p}+\vec{h}) - f(\vec{p}) - \nabla f(\vec{p})\cdot\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$

Τότε $\boxed{df(\vec{p})(\vec{h}) = \nabla f(\vec{p})\cdot\vec{h}}$ $\quad \vec{h}\in\mathbb{R}^n$

$df(\vec{p})(h_1\vec{e}_1 + \ldots + h_n\vec{e}_n) =$

$= h_1 \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(\vec{p}) + \ldots + h_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{p}) = \nabla f(\vec{p})\cdot\vec{h}$

Β $\ f : A(\subseteq\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ και $\exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbb{R}$ $\ i = 1,\ldots,n$

και είναι συνεχείς στο $\vec{p}\ (\in A)$

Τότε $\exists\ df(\vec{p})$

Το αντίστροφο δεν ισχύει !! (βλ. άσκηση)

Πίνακας διαφορικού στο $\vec{p}$ της $\vec{f}: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ $(\vec{p} \in A)$

Το $d\vec{f}(\vec{p}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Γραμμική συνάρτηση

$\vec{u}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική (πίνακας της $\vec{u}$) $=$
$= (u_1, u_2, \dots, u_m)$

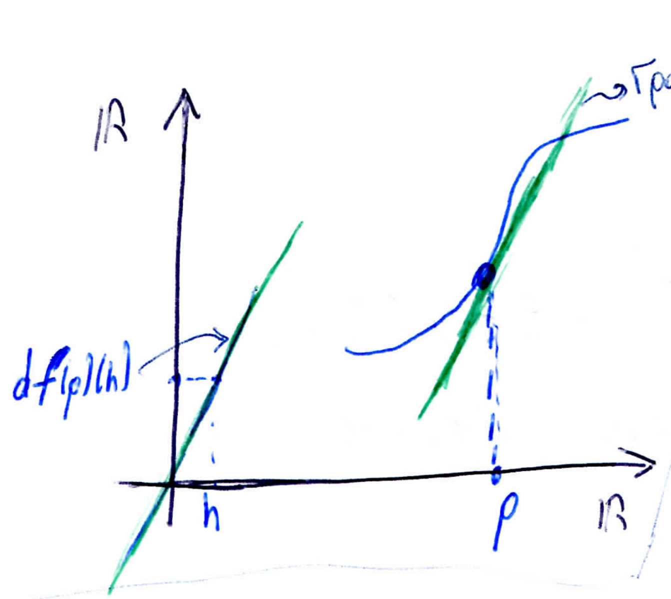
$$= \begin{pmatrix} u_1(\vec{e}_1) & u_2(\vec{e}_2) & \dots & u_1(\vec{e}_n) \\ \vdots & \vdots & & \\ u_m(\vec{e}_1) & u_m(\vec{e}_2) & \dots & u_m(\vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

- $\underline{n = m = 1}$, $f: A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $p \in A$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - df(p)(h) \ (= df(p)(1) \cdot h)}{h} = 0 \Rightarrow$$

$df(p)(1) = f'(p)$.

Πίνακας : $(f'(p))$ παράγωγος / κλίση.



$df(p)(h) = f'(p)h, \ h \in \mathbb{R}$

- $n \geq 2, \ m = 1,$

$f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$

$df(\vec{p})(\vec{h}) = \nabla f(\vec{p}) \cdot \vec{h}, \ h \in \mathbb{R}^n$

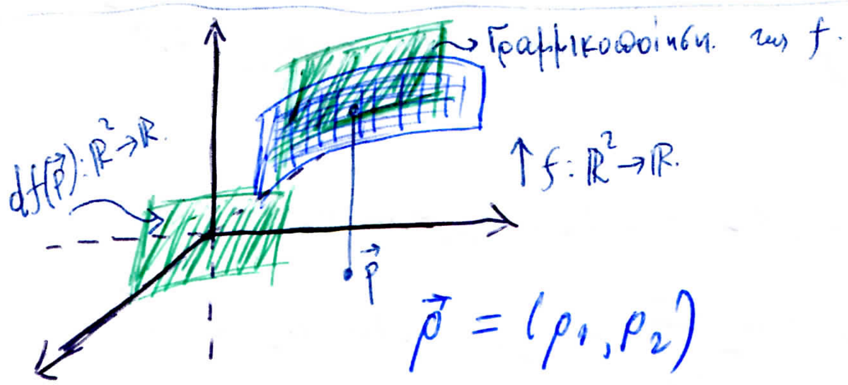
(πίνακας του $df(\vec{p})$) =

$\nabla f(\vec{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(\vec{p})$ Ανάδελτα/κλίση

- $n, m \geq 2$ (πίνακας του $d\vec{f}(\vec{p})$) =

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\vec{p})$$

Πίνακας Jacobi της $\vec{f}$ στο $\vec{p}$



$\vec{p} = (p_1, p_2)$

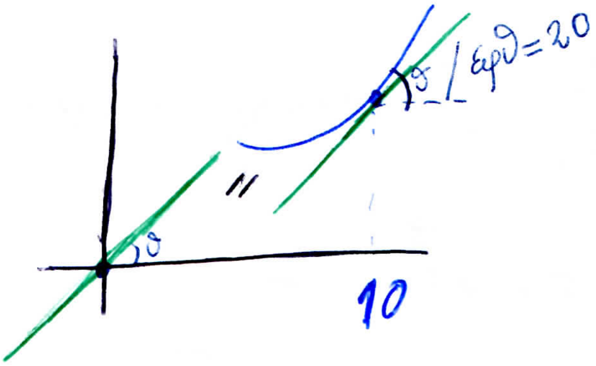
Ασκήσεις

(A) 1) $f(x)=x^2$, $x \in [0,+\infty)$.

Να υπολογιστεί το $df(1)$, $df(10)$ και ο πίνακάς του.

$df(1)(h) = 2h$, $h \in \mathbb{R}$, $f'(1)=2$

$2 = df(1)(1)$



$df(10)(h) = 20h$, $h \in \mathbb{R}$

$df(10)(1) = 20$

$f'(10) = 20$

2) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Διαφ. $df(0,1)$, $df(2,5)$ και τον αντίστοιχο πίνακα.

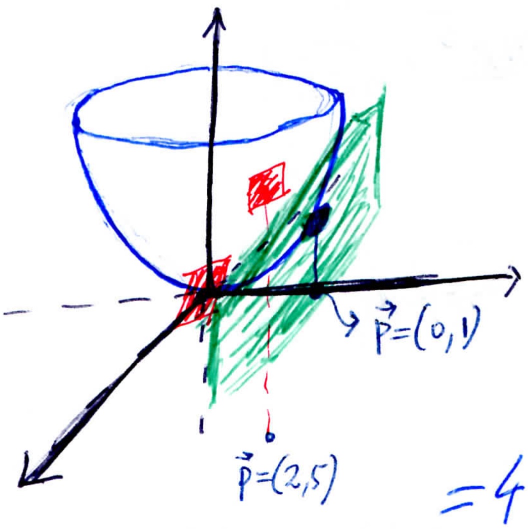
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 8y \end{aligned}\right\} \text{ συνεχείς στον } \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists\, df(x_0,y_0)\ \forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$$

$$df(x_0,y_0)(h_1,h_2) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot(h_1,h_2) =$$

$$= h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), \quad (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$$

... $df(0,1)(h_1,h_2) = 0h_1 + 8h_2 = 8h_2, \quad (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$

Παραβολοειδές (Ελλειπτικό) (όχι εκ περιστροφής)



Πίνακας

$\nabla f(0,1) = (0,8)$

$df(2,5)(h_1,h_2) =$

$= 4h_1 + 40h_2, \quad (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$

$\nabla f(2,5) = (4,40)$

3) $f(x,y,z) = e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \tau o\xi\varepsilon\varphi z,$

Να βρ. $df(0,5,10)$, Πίνακας

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= e^x \sigma\upsilon\nu y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= -e^x \eta\mu y \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{1}{1+z^2} \end{aligned}\right\}$$

Συνεχείς στον $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$df(x_0,y_0,z_0)(h_1,h_2,h_3) = \nabla f(x_0,y_0$

$= h_1 e^{x_0} \sigma\upsilon\nu y_0 - h_2 e^{x_0} \eta\mu y_0 + h_3 \frac{1}{1+z_0^2}$

$\vec{h} = (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$

$df(0,5,10)(h_1, h_2, h_3) =$

$= h_1(e^0 συν5) - h_2(e^0 ημ5) + h_3 \frac{1}{1+10^2}$

πίνακας $\nabla f(0,5,10) = \left(συν5, -ημ5, \frac{1}{101}\right)$

4) $\vec{f}(x,y) = (x^2+1, τοξεφ y)$,

$d\vec{f}(5,6)$, πίνακας.

- $f_1(x,y) = x^2+1$, $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

  Συνεχείς $\Rightarrow \exists\, df_1(x_0,y_0)$ π.ο.

- $f_2(x,y) = τοξεφ y$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 0$,

  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow \exists\, df_2(x_0,y_0)$ π.ο.

$\Rightarrow \exists\, d\vec{f}(5,6) = (df_1(5,6), df_2(5,6))$

$d\vec{f}(5,6)(h_1,h_2) = (10h_1 + 0h_2, 0h_1 + \frac{1}{37}h_2) =$

$= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1/37 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$J_{\vec{f}}(5,6) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1/37 \end{pmatrix}$