(Αναπλήρωση του μαθ. 5 Μαρτίου)

Ιδιότητες:

(Α) $\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) : I \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ Τ ∈ ∈ Ι

i) Υπάρχει η $\vec{r}'(t_0)$ ii) Υπάρχουν οι $r_1'(t_0), \dots, r_n'(t_0)$

Τότε, $\boxed{\vec{r}'(t_0) = (r_1'(t_0), r_2'(t_0), \dots, r_n'(t_0))}$

(Β) 1) $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)'(t_0) = \vec{r}_1'(t_0) + \vec{r}_2'(t_0)$

2) $(\lambda \vec{r})'(t_0) = \lambda \vec{r}'(t_0)$

3)* $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)'(t_0) = \vec{r}_1'(t_0) \cdot \vec{r}_2(t_0) + \vec{r}_1(t_0) \cdot \vec{r}_2'(t_0)$ ($\cdot$ εσωτερικό γινόμενο)

4) $n=3$: $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)'(t_0) = \vec{r}_1'(t_0) \times \vec{r}_2(t_0) + \vec{r}_1(t_0) \times \vec{r}_2'(t_0)$

(Γ) Εάν $\exists\ \vec{r}'(t_0) \Rightarrow$ η $\vec{r}$ συνεχής στο t_0
$\not\Leftarrow$ π.χ. $\vec{r}(t) = (|t|, 1)$ στο $t_0 = 0$ δεν είναι παραγωγίσιμη.

Ασκήσεις

1) Διαγράφουμε την σπειροειδή τροχιά $\vec{r}(t) = (3\cos t)\vec{i} + (3\sin t)\vec{j} + t^2\vec{k}$, $t \in [0, 2\pi]$
Να υπολογιστούν i) $\vec{v} = \vec{r}'$ $\vec{a} = \vec{r}''$ ii) $\|\vec{v}\|$ και
iii) οι χρον. στιγμές t που $\vec{v}(t) \perp \vec{a}(t)$.

---

i) $\vec{r}'(t) = (-3\sin t)\vec{i} + (3\cos t)\vec{j} + 2t\vec{k}$

$\vec{r}''(t) = (-3\cos t)\vec{i} + (-3\sin t)\vec{j} + 2\vec{k}$

ii) $\|\vec{v}(t)\| = \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9 + 4t^2}$

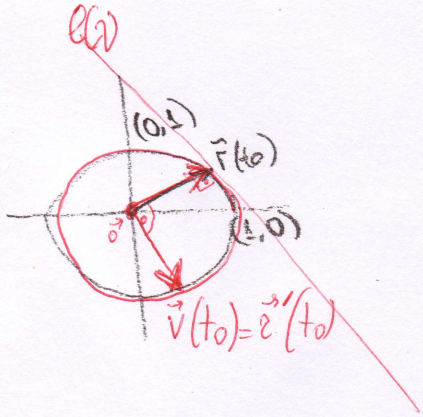
iii) $\vec{v}(t) \perp \vec{a}(t) \Leftrightarrow \vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t) = 0 \Leftrightarrow 9\sin t\cos t - 9\sin t\cos t + 4t = 0$
$\Leftrightarrow 4t = 0 \Leftrightarrow \underline{t = 0}$

2) Διαγράφουμε την τροχιά $\vec{r}(t) = (\text{συν}t, \text{ημ}t)$, $t \in [0, 2\pi]$ του $\mathbb{R}^2$.

Να βρεθούν: i) Δρόμος (ίχνος) της $\vec{r}$

ii) $\vec{v}$, Εφαπτομ. ευθεία

iii) Τι παρατηρείτε για τα $\vec{r}, \vec{v}$;



i) $x(t) = \text{συν}t$ | $x^2(t) + y^2(t) = 1$, $t \in [0, 2\pi]$

$y(t) = \text{ημ}t$ | (περιφέρεια μοναδιαίου κύκλου)

ii) $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (-\text{ημ}t, \text{συν}t)$

Εφαπτομ. ευθεία στο $t = t_0$: $\ell(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}\,'(t_0)$

iii) $\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = -\text{ημ}t\,\text{συν}t + \text{ημ}t\,\text{συν}t = 0$

Η ταχύτητα κάθετη στο $\vec{r}(t)$.

3) Έστω $\vec{r}(t)$ ώστε $\|\vec{r}(t)\| = c$ $\forall\, t \in I$. I = διάστημα ($c > 0$).
(δηλ. είμαστε στην επιφάνεια σφαίρας κέντρου $\vec{O}$ και ακτίνας c)

Τότε $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0$, $t \in I$. Και αντίστροφα:

Αν $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0$, $t \in I$, τότε είμαστε σε επιφάνεια σφαίρας κέντρου $\vec{O}$ κ' ακτίνας $r > 0$.

$\|\vec{r}(t)\| = c \iff \|\vec{r}(t)\|^2 = c^2 \iff \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = c^2$, $t \in I$

$\overset{(*)}{\iff} (\vec{r} \cdot \vec{r})'(t) = 0 \iff \vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0$

$\iff \vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0$

(*). Εάν $f'(t) = 0$ για κάθε $t \in I$ = διάστημα $\Rightarrow$ f είναι σταθερή στο I.
Το παραπάνω ισχύει για I = διάστημα, από το Θ.Μ.Τ (Μέσης Τιμής)