3.) Παραγώγιση, Μερική Παραγώγιση, Διαφορικό

1) Παράγωγος διαν. συνάρτησης μιας μεταβλητής

$\vec r : I \, (\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$, I = ΔΙΑΣΤΗΜΑ του $\mathbb{R}$ $\big[\, [\alpha,\beta], (\alpha,\beta], [\alpha,\beta), (\alpha,\beta), (-\infty,\alpha], (-\infty,\alpha), [\beta,+\infty), (\beta,+\infty), \mathbb{R} \,\big]$

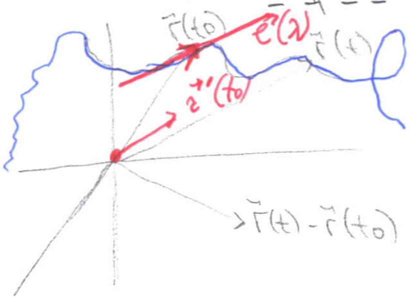
$\vec r(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$

$n=3$: $\vec r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ Διανυσμ. θέση (t=χρόνος, συνήθως)

Ορισμός: $t_0 \in I$. Εάν υπάρχει το όριο $\boxed{\lim_{t\to t_0} \dfrac{\vec r(t) - \vec r(t_0)}{t-t_0} =: \vec r\,'(t) =: \dfrac{d\vec r(t_0)}{dt}}$

καλείται παράγωγος της $\vec r$ στο t_0.

$\vec v(t) = \vec r\,'(t)$ ταχύτητα , $\vec a(t) = (\vec r\,')'(t)$ επιτάχυνση



Εφαπτομένη ευθεία στο $\vec r(t_0)$

$$\vec \ell(\lambda) = \vec r(t_0) + \lambda \vec r\,'(t_0)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

Ιδιότητες

Ⓐ $\vec{r}=(r_1,r_2,\dots,r_n): I\to\mathbb{R}^n$, $t_0\in I$ ΤΕΕΙ

i) Υπάρχει η $\vec{r}'(t_0)$ ii) Υπάρχουν οι $r_1'(t_0),\dots,r_n'(t_0)$

Τότε, $\boxed{\vec{r}'(t_0)=\left(r_1'(t_0),r_2'(t_0),\dots,r_n'(t_0)\right)}$

Ⓑ 1) $(\vec{r}_1+\vec{r}_2)'(t_0)=\vec{r}_1'(t_0)+\vec{r}_2'(t_0)$

2) $(\lambda\vec{r})'(t_0)=\lambda\vec{r}\,'(t_0)$

3)* $(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2)'(t_0)=\vec{r}_1'(t_0)\cdot\vec{r}_2(t_0)+\vec{r}_1(t_0)\cdot\vec{r}_2'(t_0)$ ("ο" εσωτ. γινόμενο)

4) $n=3$: $(\vec{r}_1\times\vec{r}_2)'(t_0)=\vec{r}_1'(t_0)\times\vec{r}_2(t_0)+\vec{r}_1(t_0)\times\vec{r}_2'(t_0)$ (προσοχή στην σειρά)

Ⓖ Εάν $\exists\ \vec{r}'(t_0)\Rightarrow$ η $\vec{r}$ συνεχής στο t_0

$\not\Leftarrow$ πχ. $\vec{r}(t)=(|t|,1)$, $t\in\mathbb{R}$. συνεχής στο $t_0=0$

δεν υπάρχει η $\vec{r}_1'(t)=|t|'$ στο $t_0=0$!!