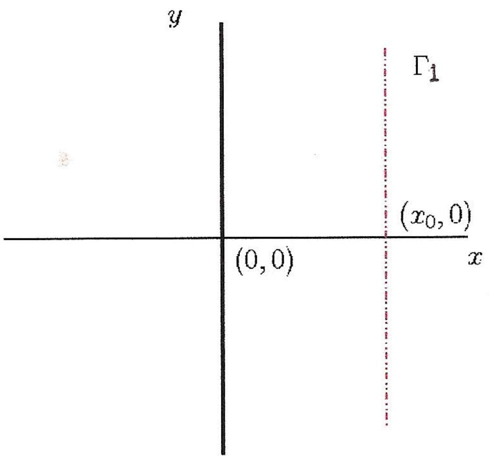
Συστήματα συντεταγμένων στον R^2

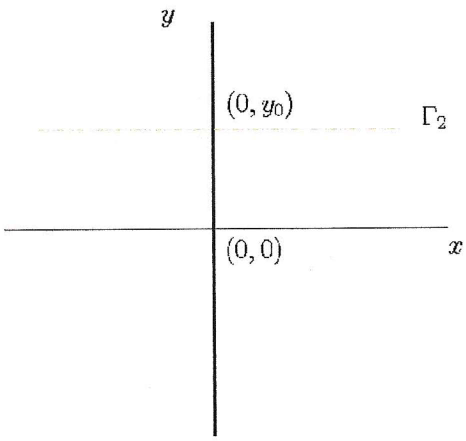
I. <u>Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y)</u>

Καρτεσιανές καμπύλες (ευθείες) $x = x_0, y = y_0$.



$$\Gamma_1 : x = x_0, \ \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : x = x_0, \ y \in \boldsymbol{R}\}$$

$$\{\vec{r}_1(y) = (x_0, y), y \in \boldsymbol{R}\}$$

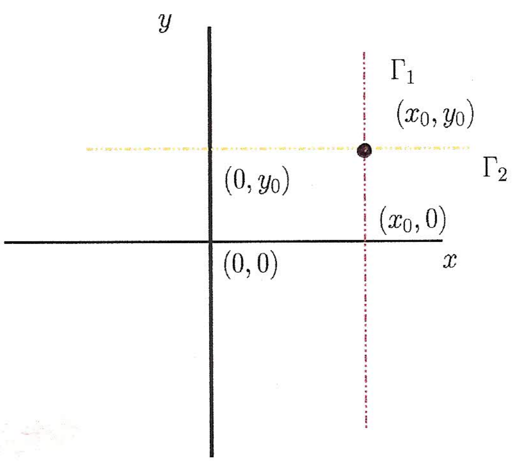


$$\Gamma_2 : y = y_0, \ \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : y = y_0, \ x \in \boldsymbol{R}\}$$

$$\{\vec{r}_2(x) = (x, y_0), x \in \boldsymbol{R}\}$$

Το (x_0, y_0) είναι το σημείο τομής των καμπυλών

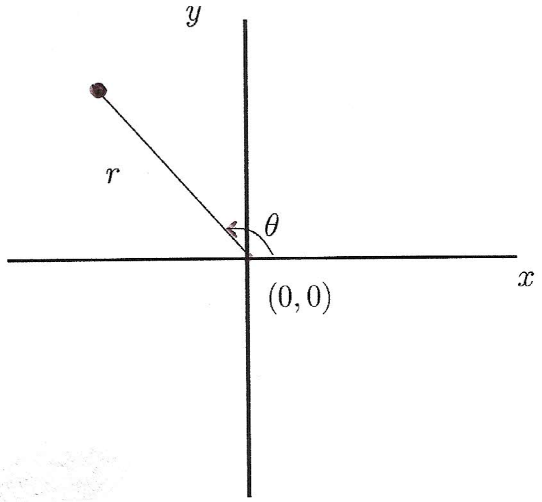
$$\boldsymbol{\Gamma_1 : x = x_0 \quad , \quad \Gamma_2 : y = y_0}$$



II. Πολικές συντεταγμένες (r, θ)

Ο $\vec{T}: [0, \infty) \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ (επί), με $\vec{T}(r, \theta) = (r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta)$ καλείται <u>πολικός μετασχηματισμός</u> και τα r, θ <u>πολικές συντεταγμένες</u>.

Ο περιορισμός του $\vec{T}: (0, \infty) \times [0,2\pi) \to \boldsymbol{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ είναι 1-1 και επί.

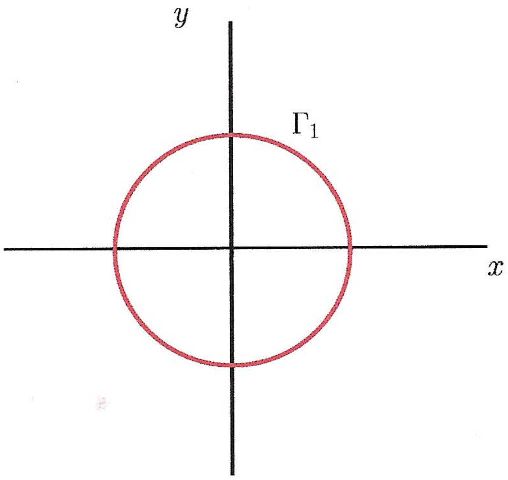


Σχέση Καρτεσιανών Πολικών συντεταγμένων.

$$\begin{cases} x = r\,\sigma\upsilon\nu\theta \\ y = r\,\eta\mu\theta \end{cases} \quad (r, \theta) \in [0, \infty) \times \boldsymbol{R}$$

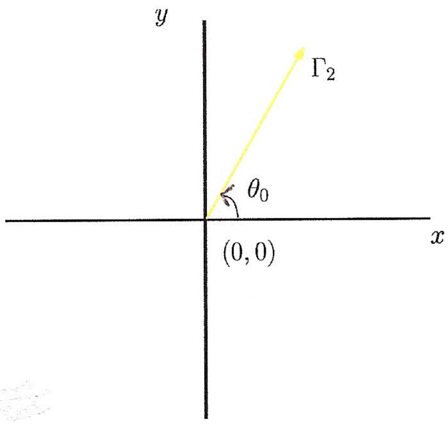
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} \;\; \alpha\nu\; x \neq 0. A\nu\; x = 0: \theta = \frac{\pi}{2}\; \gamma\iota\alpha\; y > 0, \theta = \frac{3\pi}{2}\; \gamma\iota\alpha\; y < 0 \end{cases} \quad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

Πολικές καμπύλες $r = r_0(> 0), \theta = \theta_0$ *(στο καρτεσιανό σύστημα)*



$\Gamma_1: r = r_0,$ *κύκλος* $\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : x^2 + y^2 = r_0^2\}$

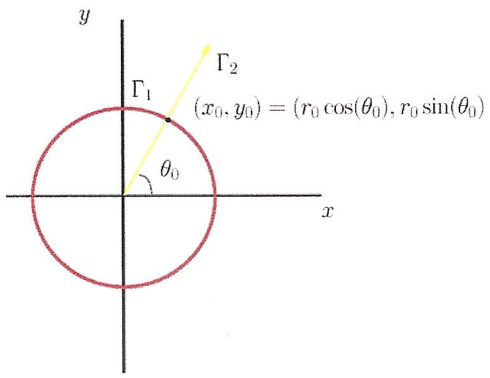
$\{\vec{r}_1(\theta) = (r_0\sigma\upsilon\nu\theta, r_0\eta\mu\theta), \theta \in [0,2\pi]\}$



$\Gamma_2: \theta = \theta_0,$ *ημιευθεία* $\{\vec{r}_2(r) = (r\sigma\upsilon\nu\theta_0, r\eta\mu\theta_0), r \geq 0\}$

Το $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = (\boldsymbol{r_0\sigma\upsilon\nu\theta_0}, \boldsymbol{r_0\eta\mu\theta_0})$ είναι το σημείο τομής των καμπυλών

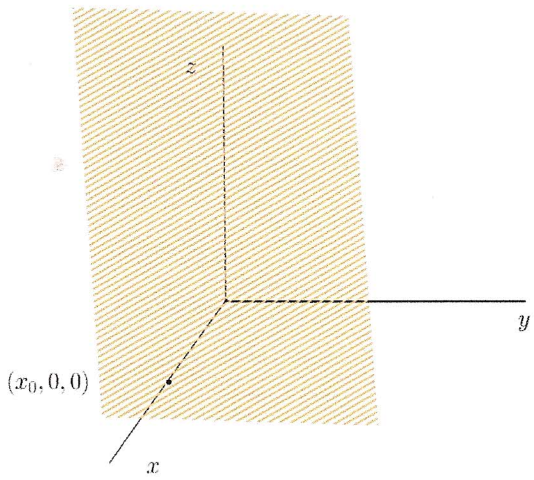
$\boldsymbol{\Gamma_1 : r = r_0}$, $\boldsymbol{\Gamma_2 : \theta = \theta_0}$



Συστήματα συντεταγμένων στον R^3

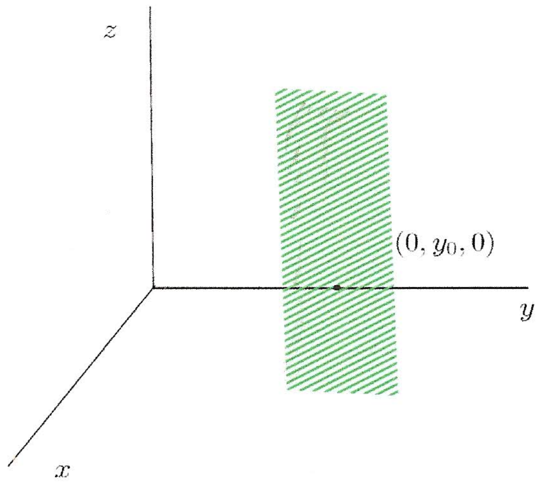
I. <u>Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z)</u>

<u>Καρτεσιανές επιφάνειες (επίπεδα)) $x = x_0, y = y_0, z = z_0$.</u>



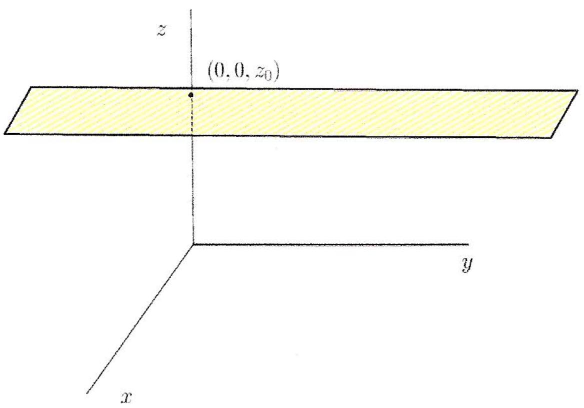
$S_1: x = x_0, \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 : x = x_0, y, z \in \boldsymbol{R}\}$

$\{\vec{r}_1(y, z) = (x_0, y, z), y, z \in \boldsymbol{R}\}$



$S_2: y = y_0, \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 : y = y_0, x, z \in \boldsymbol{R}\}$

$\{\vec{r}_2(x, z) = (x, y_0, z), x, z \in \boldsymbol{R}\}$

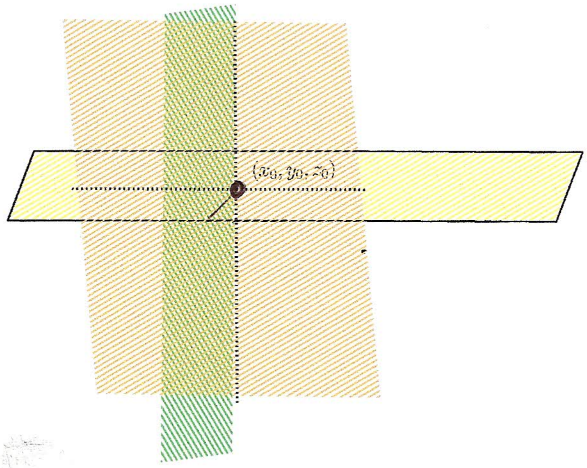


$S_3: z = z_0, \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 : z = z_0, x, y \in \boldsymbol{R}\}$

$\{\vec{r}_3(x, y) = (x, y, z_0), x, y \in \boldsymbol{R}\}$

Το (x_0, y_0, z_0) είναι το σημείο τομής των επιφανειών

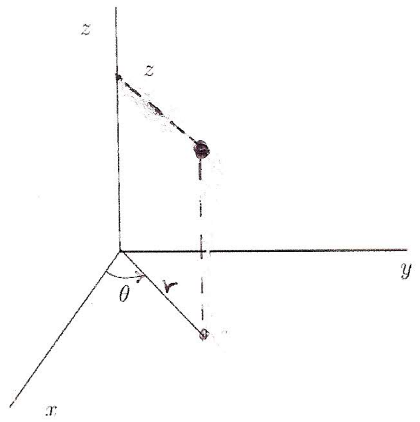
$$S_1: x = x_0,\ S_2: y = y_0,\ S_3: z = z_0$$



II. Κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z)

Ο $\vec{T}: [0, \infty) \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$ (επί), με $\vec{T}(r, \theta, z) = (r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta, z)$ καλείται κυλινδρικός μετασχηματισμός και τα r, θ, z κυλινδρικές συντεταγμένες.

Ο περιορισμός του $\vec{T}: (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3 \backslash \{(0,0,z), z \in \boldsymbol{R}\}$ είναι 1-1 και επί.

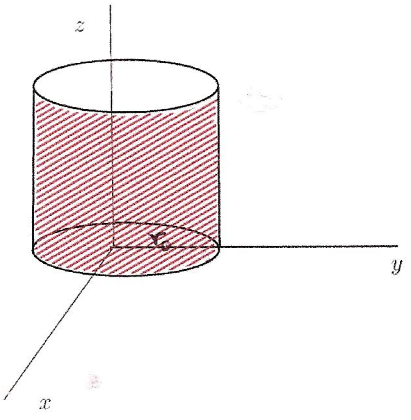


Σχέση Καρτεσιανών Κυλινδρικών συντεταγμένων.

$$\begin{cases} x = r\ \sigma\upsilon\nu\theta \\ y = r\ \eta\mu\theta \\ z = z \end{cases} \qquad (r, \theta, z) \in [0, \infty) \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$$

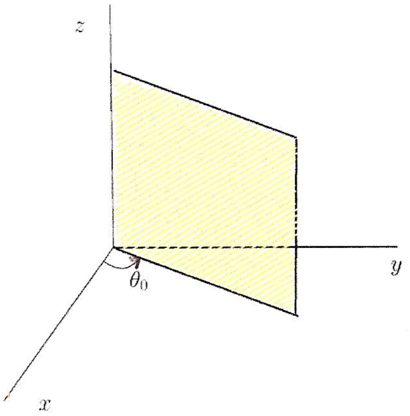
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x}\ \ \alpha\nu\ x \neq 0. A\nu\ x = 0 : \theta = \frac{\pi}{2}\ \gamma\iota\alpha\ y > 0, \theta = \frac{3\pi}{2}\ \gamma\iota\alpha\ y < 0 \\ z = z \end{cases} \qquad (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \backslash \{(0,0,z)\}$$

Κυλινδρικές επιφάνειες $r = r_0(>0), \theta = \theta_0, z = z_0$ (στο καρτεσιανό σύστημα)



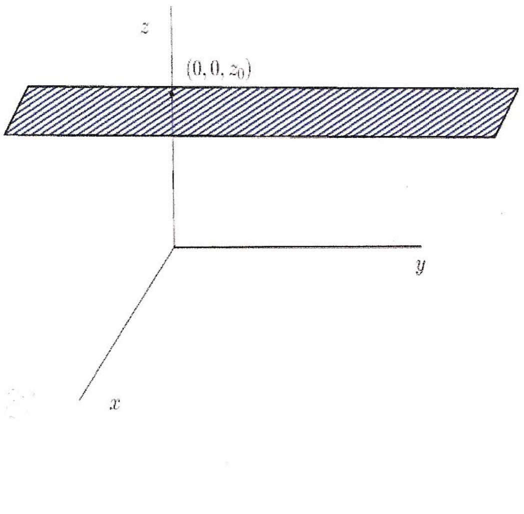
$S_1: r = r_0, \kappa\acute{\upsilon}\lambda\iota\nu\delta\rho o\varsigma \quad \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 : x^2 + y^2 = r_0^2\}$

$\{\vec{r}_1(\theta, z) = (r_0\sigma\upsilon\nu\theta, r_0\eta\mu\theta, z), \theta \in [0,2\pi], z \in \boldsymbol{R}\}$



$S_2: \theta = \theta_0, \eta\mu\iota\epsilon\pi\acute{\iota}\pi\epsilon\delta o$

$\{\vec{r}_2(r, z) = (r\sigma\upsilon\nu\theta_0, r\eta\mu\theta_0, z), r \geq 0, z \in \boldsymbol{R}\}$

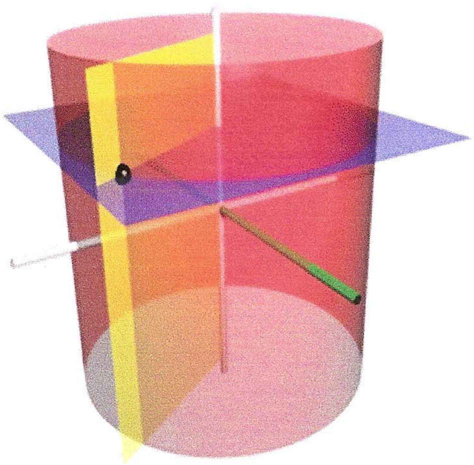


$S_3: z = z_0, \epsilon\pi\acute{\iota}\pi\epsilon\delta o \quad \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 : z = z_0, (x,y) \in \boldsymbol{R}^2\}$

$\{\vec{r}_3(r, \theta) = (r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta, z_0), r > 0, \theta \in [0,2\pi]\}$

Το $(x_0, y_0, z_0) = (r_0 \eta\mu\theta_0, r_0 \sigma\upsilon\nu\theta_0, z_0)$ είναι το σημείο τομής των επιφανειών

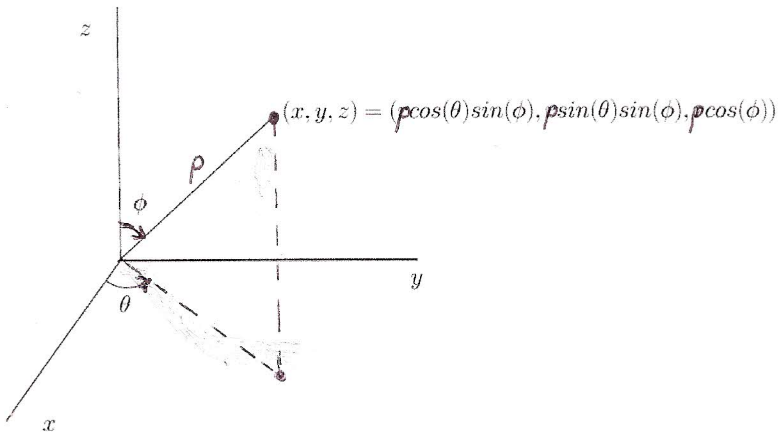
$$S_1 : r = r_0, S_2 : \theta = \theta_0, S_3 : z = z_0$$



II. Σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, θ, φ)

Ο $\vec{T}: [0,\infty) \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$ (επί), με $\vec{T}(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sigma\upsilon\nu\theta\ \eta\mu\varphi, \rho\eta\mu\theta\ \eta\mu\varphi, \rho\sigma\upsilon\nu\varphi)$ καλείται σφαιρικός μετασχηματισμός και τα ρ, θ, φ σφαιρικές συντεταγμένες.

Ο περιορισμός του $\vec{T}: (0,\infty) \times [0,2\pi) \times (0,\pi) \to \boldsymbol{R}^3 \backslash \{(0,0,z), z \in \boldsymbol{R}\}$ είναι 1-1 και επί.

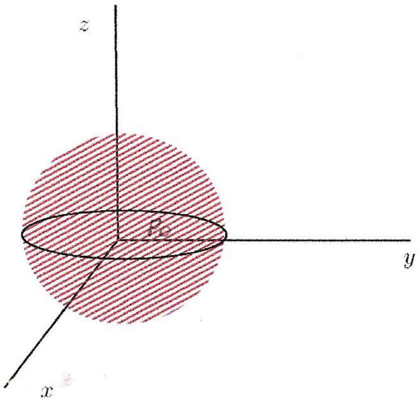


Σχέση Καρτεσιανών Σφαιρικών συντεταγμένων

$$\begin{cases} x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi \\ y = \rho\eta\mu\theta\eta\mu\varphi \\ z = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi \end{cases} , (\rho,\theta,\varphi) \in [0,\infty) \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$$

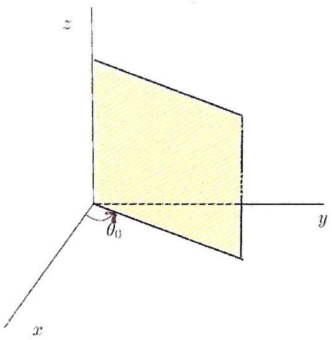
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varepsilon\varphi\theta = \dfrac{y}{x}\ \alpha\nu\ x \neq 0. A\nu\ x = 0: \theta = \dfrac{\pi}{2}\ \gamma\iota\alpha\ y > 0, \theta = \dfrac{3\pi}{2}\ \gamma\iota\alpha\ y < 0 \\ \sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases} \qquad (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \backslash \{(0,0,z): z \in \boldsymbol{R}\}$$

Σφαιρικές επιφάνειες $\rho = \rho_0 > 0, \theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0 \in (0,\pi)$ (στο καρτεσιανό σύστημα)



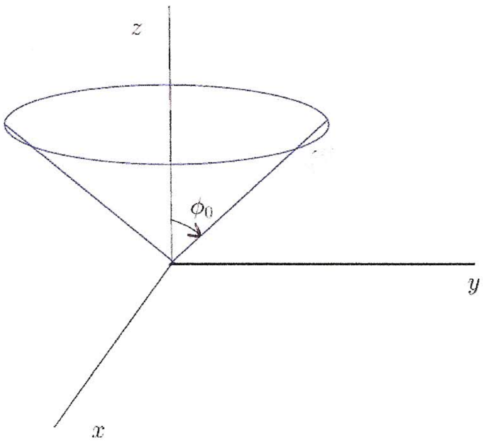
$S_1: \rho = \rho_0, σφαίρα\ \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = \rho_0^2\}$

$$\begin{Bmatrix} \vec{r}_1(\theta,\varphi) = (\rho_0\, συνθ\, ημφ, \rho_0\, ημθ\, ημφ, \rho_0\, συνφ), \\ \theta \in [0,2\pi], \varphi \in [0,\pi] \end{Bmatrix}$$



$S_2: \theta = \theta_0, ημιεπίπεδο$

$$\begin{Bmatrix} \vec{r}_2(\rho,\varphi) = (\rho συνθ_0\, ημφ, \rho ημθ_0 ημφ, \rho συνφ), \\ \rho \geq 0, \varphi \in [0,\pi] \end{Bmatrix}$$



$S_3: \varphi = \varphi_0, κώνος$

$$\begin{Bmatrix} \vec{r}_3(\rho,\theta) = (\rho συνθ\, ημφ_0, \rho ημθ\, ημφ_0, \rho συνφ_0), \\ \rho \geq 0, \theta \in [0,2\pi] \end{Bmatrix}$$

Το $(x_0, y_0, z_0) = (\rho_0 \sigma\upsilon\nu\theta_0\ \eta\mu\varphi_0, \rho_0\ \eta\mu\theta_0\ \eta\mu\varphi_0, \rho_0\ \sigma\upsilon\nu\varphi_0)$ **είναι το σημείο τομής των επιφανειών**

$$S_1 : \rho = \rho_0, S_2 : \theta = \theta_0, S_3 : \varphi = \varphi_0$$