Παραδείγματα καμπυλών με παράμετρο στον $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ και σχήματα αυτών

1) Να γραφεί η αναλυτική και η καρτεσιανή εξίσωση των καμπυλών

i) $\vec{r}_1(t)=(t,2t^2)$, $t\in[-1,+1]$

ii) $\vec{r}_2(t)=(t^2,4t^4)$, $t\in[-1,+1]$

iii) $\vec{r}_3(t)=(\text{συν}\,t,\text{ημ}\,t)$, $t\in[0,\pi]$

iv) $\vec{r}_4(t)=(\text{συν}(2t),\text{ημ}(2t))$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

v) $\vec{r}_5(t)=(2\,\text{συν}\,t,5\,\text{ημ}\,t)$, $t\in[0,2\pi]$

Λύση της 1)

i) $\Gamma_1=\{\vec{r}_1(t)=(t,2t^2):t\in[-1,+1]\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y-2x^2=0,\ (x,y)\in[-1,+1]\times[0,2]\}$
$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=2x^2,\ x\in[-1,+1]\}$

ii) $\Gamma_2=\{\vec{r}_2(t)=(t^2,4t^4):t\in[-1,+1]\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y-4x^2=0,\ (x,y)\in[0,1]\times[0,4]\}$
$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=4x^2,\ x\in[0,1]\}$.

iii) $\Gamma_3=\{\vec{r}_3(t)=(\text{συν}\,t,\text{ημ}\,t):t\in[0,\pi]\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=1,\ (x,y)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty)\}$
$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,+1]\}$

iv) $\Gamma_4=\{\vec{r}_4(t)=(\text{συν}\,2t,\text{ημ}\,2t):t\in[0,\frac{\pi}{2}]\}=\Gamma_3$.

v) $\Gamma_5=\{\vec{r}_5(t)=(2\,\text{συν}\,t,5\,\text{ημ}\,t):t\in[0,2\pi]\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: (\frac{x}{2})^2+(\frac{y}{5})^2=1,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$
Δεν έχει καρτεσιανή εξίσωση.

2)(α) Έχουν οι Γ_1, Γ_2 κάποιο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό;
Πως προβάλλονται στο επίπεδο των x, y;
i) $\Gamma_1 : \vec{r}_1(t) = (\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t, 2)$, $t \in [0, 2\pi]$
ii) $\Gamma_2 : \vec{r}_2(t) = (t^3, 2t, 1)$, $t \in [-1, +1]$

Λύση της 2)(α)

i) Η Γ_1 είναι στο επίπεδο $z=2$. Η προβολή της είναι κύκλος, κέντρου $(0,0)$ ακτίνας 1 (στο επίπεδο των x, y)

ii) Η Γ_2 είναι στο επίπεδο $z=1$. Η προβολή της είναι η καμπύλη με καρτεσιανή εξίσωση $y = 2\sqrt[3]{x}$, $x \in [-1, +1]$ (ή $x = \frac{y^3}{8}$, $y \in [-2, +2]$)

2)(β) iii)+iv) Έχουν οι $\Gamma_3 : \vec{r}_3(t) = (\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t, 3t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$\Gamma_4 : \vec{r}_4(t) = (\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t, \frac{t}{3})$, $t \in [0, 6\pi]$

κάποια κοινό χαρακτηριστικό; Είναι η Γ_3 ή η Γ_4 σε επίπεδο;

v) Ποια σχέση ικανοποιεί η $\Gamma_5 : \vec{r}_5(t) = (t\sigma\upsilon\nu(10t), t\eta\mu(10t), t^2)$, $t \geq 0$;

vi) Τι μπορούμε να πούμε για την $\Gamma_6 : \vec{r}_6(t) = (t, t, 4t^2)$, $t \in \mathbb{R}$;

Λύση της 2)(β).

iii)+iv) Η προβολή της Γ_3 και της Γ_4 είναι κύκλος κέντρου $(0,0)$, ακτίνος 1, στο επίπεδο των x, y.

Δεν είναι σε επίπεδο. (βλ. επίπεδα στον $\mathbb{R}^3$)

v) Ικανοποιεί την σχέση: $x^2 + y^2 = z^2$ (είναι σε κώνο, βλ. εξίσωση κώνου)

vi) Η Γ_6 είναι παραβολή στο επίπεδο $y = x$.