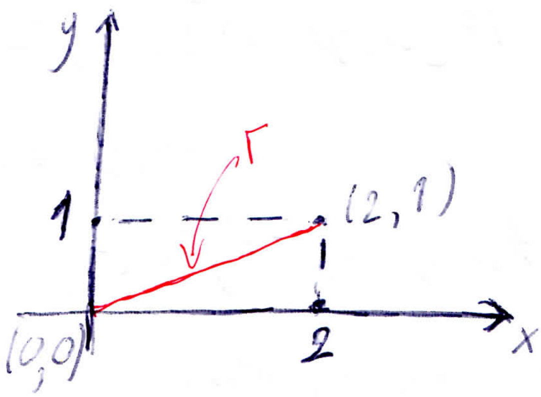
Ανάλυση ΙΙ - 06 μάθημα - 9/03/2011

Παραδείγματα (συνέχεια)

2)



$\Gamma = [(0,0),(2,1)]$

Αναλυτική μορφή

$$\Gamma = \left\{ (x,y) : y - \frac{1}{2}x = 0 \,,\ (x,y) \in [0,2]\times[0,1] \right\}$$

Καρτεσιανή μορφή $\Gamma = \{ (x,y) : y = \frac{1}{2}x \,,\ x \in [0,2] \}$ $\left(F(x,y) = y - \frac{1}{2}x\right)$

$\left(f(x) = \frac{1}{2}x\right)$

Παραμετρική

$$\Gamma = \left\{ \vec{r}(t) = \left(t, \frac{1}{2}t\right),\ t \in [0,2] \right\}$$

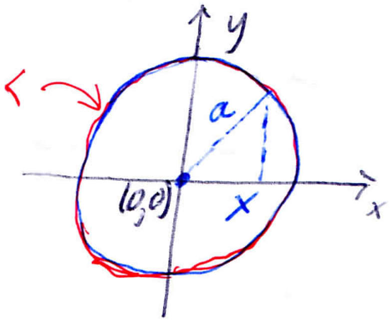
$$\text{ή } \Gamma = \left\{ \vec{r}_1(t) = (2t,t) : t \in [0,1] \right\} =$$

$$\left\{ \vec{r}_1(t) = (1-t)(0,0) + t(2,1) : t \in [0,1] \right\} \quad (*)$$

Άλλες ....

$$\text{π.χ. } \Gamma = \left\{ \vec{r}_2(t) = \left(e^t - 1, \frac{e^t - 1}{2}\right) : t \in [0, \ln 3] \right\}$$

3) Να περιγραφεί η καμπύλη του κύκλου με ακτίνα $r = a > 0$



$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = a^2, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$,

$(F(x,y) = x^2+y^2-a^2)$

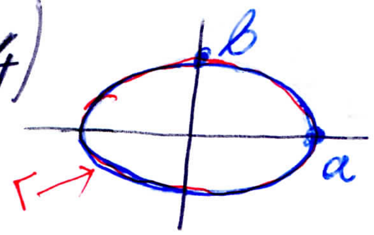
Δεν έχει καρτεσιανή εξίσωση

$\Gamma = \{\vec{r}(\theta) = (a\,\text{συν}\,\theta, a\,\text{ημ}\,\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$ (*)

Άλλες ....

$\Gamma = \{\vec{r}_1(t) = (a\,\text{συν}\,e^t, a\,\text{ημ}\,e^t), t \in [0, \ln(1+2\pi)]\}$

4) $a, b > 0$ Έλλειψη

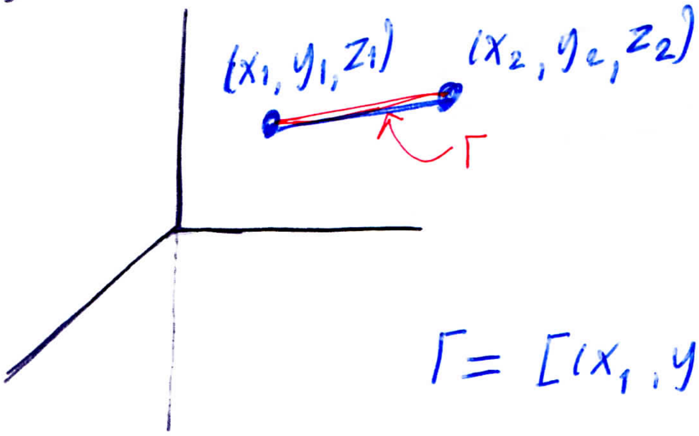


$\Gamma = \{(x,y) : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{\vec{r}(\theta) = (a\,\text{συν}\,\theta, b\,\text{ημ}\,\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$

$\begin{cases} x(\theta) = a\,\text{συν}\,\theta \\ y(\theta) = b\,\text{ημ}\,\theta \end{cases}$

5)

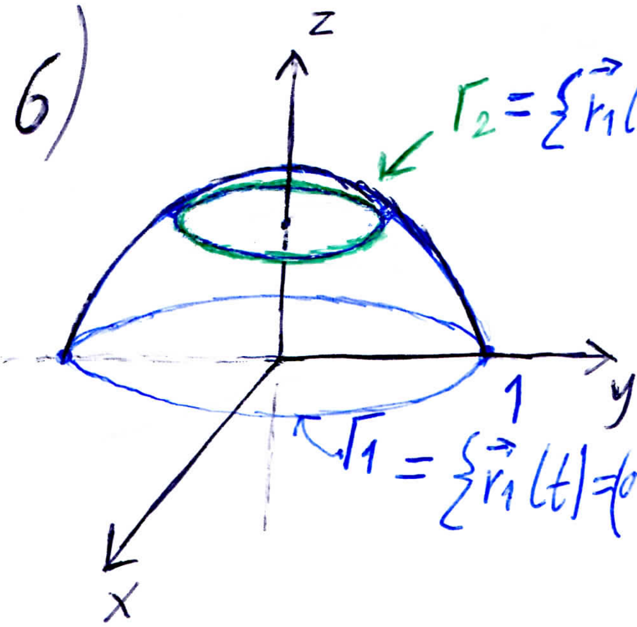


$$\Gamma = [(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)] =$$

$$= \{\vec{r}(t) = (x_1, y_1, z_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) : t \in [0,1]\} =$$

$$= \underline{\{\vec{r}(t) = (1-t)(x_1, y_1, z_1) + t(x_2, y_2, z_2) : t \in [0,1]\}} \circledast$$

6)



$$\Gamma_2 = \{\vec{r}_1(t) = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\,\sigma\upsilon\nu t, \frac{\sqrt{15}}{4}\,\eta\mu t, \frac{1}{4}\right) : t \in [0, 2\pi]\}$$

$$\Gamma_1 = \{\vec{r}_1(t) = (\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t, 0) : t \in [0, 2\pi]\}$$

Η συνέχεια στα Β)+Γ) του Μαθήματος 06:

σελ. 65, 66, 67 (επ. τάξη)

(Συνέχεια του Β)+Γ))

Σημείωση: Υπάρχουν καμπύλες (Peano)

$\vec{r}:[0,1] \to [0,1]\times[0,1]$

επί + συνεχής!

(βλ. video στην ηλ. τάξη)

Ειδικές καμπύλες

(A) Ευθείες στον $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$)

X 1-διάστατο γρ. υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$

$X = \{t\vec{b} : t \in \mathbb{R}\}$ για κάποιο $\vec{b} \neq \vec{0}$

Ευθεία του $\mathbb{R}^n$, που διέρχεται από το $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ και είναι $\parallel \vec{b}$

$$\ell = \{\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b},\ t \in \mathbb{R}\} = \vec{a} + X$$

(μεταφορά του X στο $\vec{x}$)

Παραδείγματα

$n = 2$, $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2) \neq (0,0)$

$\Gamma: \vec{r}(t) = (a_1, a_2) + t(b_1, b_2)$, ευθεία που περνά από το $\vec{\alpha}$ και είναι $/\!/ \vec{b}$

$$\begin{cases} x(t) = a_1 + t b_1 \\ y(t) = a_2 + t b_2 \end{cases}$$

αν $b_1 \neq 0$, $y = a_2 + \dfrac{x - a_1}{b_1} b_2$

$$y = ax + b$$

αν $b_2 \neq 0$ $\quad x = \gamma y + \delta$

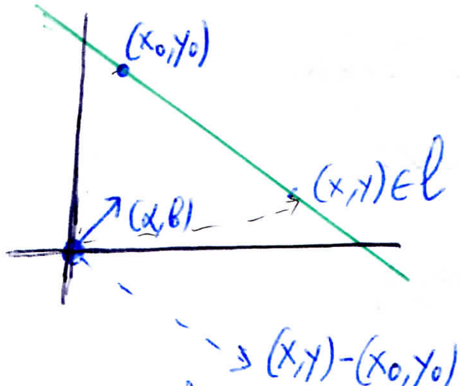
$n = 3$ $\quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0)$

$$\begin{cases} x(t) = a_1 + t b_1 \\ y(t) = a_2 + t b_2 \\ z(t) = a_3 + t b_3 \end{cases} \quad \Bigg| \quad t \in \mathbb{R}$$

Ευθεία που περνά α
περνά από τα $\vec{\alpha}$
και είναι $/\!/ \vec{b}$.

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί η ευθεία του $\mathbb{R}^2$ που περνά από το $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και είναι $\perp (a,b) \neq (0,0)$



$$(a,b)\cdot(x-x_0, y-y_0)=0,$$

$$\boxed{ax+by=c}$$

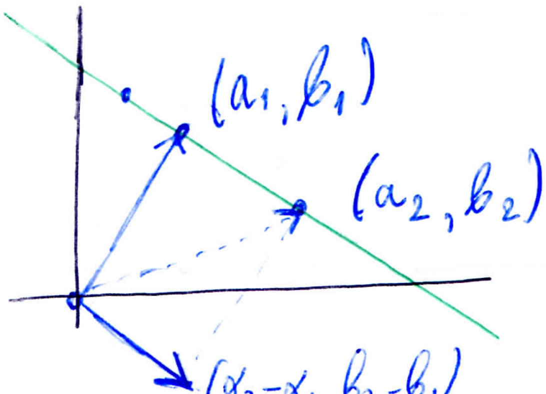
$$c=ax_0+by_0$$

Άρα αν έχουμε την ευθεία του $\mathbb{R}^2$ με

$\ell : \gamma x+\delta y=c, \ (\gamma,\delta)\neq(0,0)$
τότε το $(\gamma,\delta) \perp$ ευθεία ℓ.

2) $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ διαφορετικά.

Να βρεθεί η ευθεία ℓ που περνά από αυτά.



$$\vec{r}(t)=(a_1,a_2)+t(a_2-a_1, b_2-b_1)$$

$$\begin{cases} x=a_1+t(a_2-a_1) \\ y=a_2+t(b_2-b_1) \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Έστω $a_1 \neq a_2$ $\quad \ell : \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 \end{vmatrix}=0$

(Λύνουμε: $y=\alpha_2+\frac{x-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}(b_2-b_1) \Rightarrow (y-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_1)-(x-\alpha_1)$

(B) Κωνικές τομές :

Δευτέρου βαθμού καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$ (Τετραγωνικές του $\mathbb{R}^2$)

$$Ax^2+By^2+\Gamma xy+\Delta x+Ey+Z=0,\quad (A,B,\Gamma)\neq(0,0,0)$$

Γενική εξίσωση (αναλυτική)

Αποδεικνύεται ότι αυτές είναι μεταφορές, περιστροφές των:
Έλλειψη, Υπερβολή, Παραβολή

ανάστροφος

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^{\perp}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0 \quad \circledast$$

ή

$$\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0$$

Τετραγωνικές μορφές του $\mathbb{R}^2$

Σχ. Η μορφή της $\circledast$ εξαρτάται από τον πίνακα $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\gamma\end{pmatrix}$, αν αυτός είναι θετικά, αρνητικά ορισμένο, αόριστος ισοδύναμα : από τις ιδιοτιμές του.