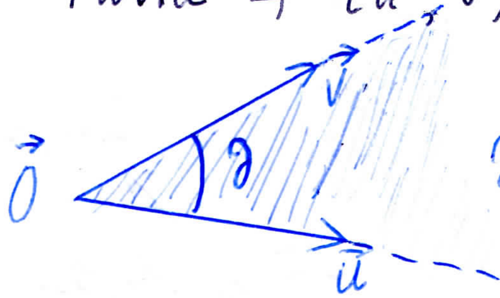
Ανάλυση ΙΙ - Μάθημα 03 - 28/02/2011

Γωνία δύο ($\neq \vec{0}$) διανυσμάτων, μέτρο της. Συνημίτονο, σχέση συνημιτόνου με το εσωτερικό γινόμενο, κάθετα διανύσματα, προβολή διανύσματος σε άλλο.

- Γωνία $\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$, $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ $(n \geq 2)$

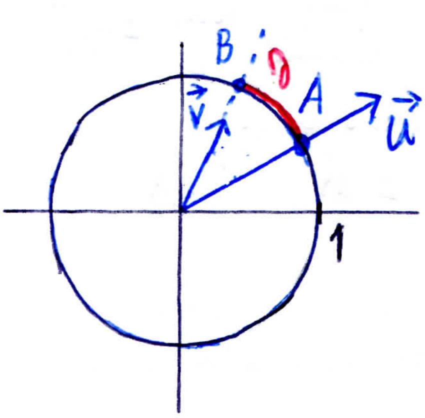


$\vartheta = \measuredangle(\vec{u},\vec{v}) =:$

$\{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} : \lambda, \mu \geq 0\}$

- Μέτρο της ϑ

Τα $\vec{u},\vec{v}$ ορίζουν ένα επίπεδο E (γενικά), με κέντρο το $\vec{0}$ και ακτίνα $\underline{1}$



Η ϑ τέμνει τον κύκλο σε τόξο $\widehat{AB}$. Το μήκος του $\widehat{AB}$ ορίζεται ως το μέτρο της ϑ (Ευκλείδης, Αρχιμήδης)

(28/02)

Συμβολίζουμε με 2π το μήκος του κύκλου.
Το μέτρο μιας γωνίας είναι μεταξύ του 0 και του π.
Εάν το $A = B$, τότε $\partial = 0$ // Το μέτρο της γωνίας συμβολίζεται με ∂
Αν το $B = -A$, τότε $\partial = \pi$

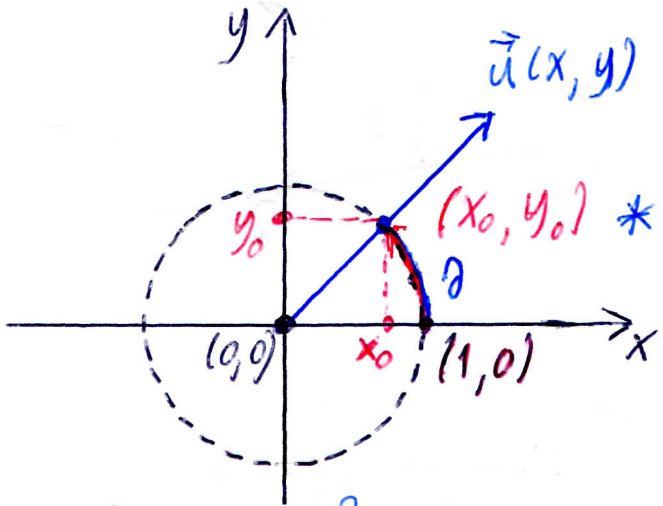
Συνάρτηση συνημιτόνου (Υπενθύμιση)

- Στον $\mathbb{R}^2$

  $\vec{u} = (x, y) \neq (0,0)$

  $\partial = \measuredangle\big((1,0), (x,y)\big)$

- $(x_0, y_0) = \dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|}$



Εάν γνωρίζουμε την ∂, τότε γνωρίζουμε το x_0 και αντίστροφα.

Δηλ. ορίζεται συν: $[0, \pi] \longrightarrow [-1, +1]$,

- $(\text{συν}\,\partial =: x_0)$ συνάρτηση "1-1" και "επί"

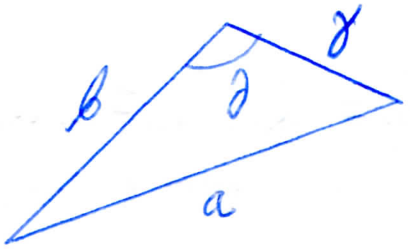
- $(\text{ημ}\,\partial =: y_0)$ και επεκτείνεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συνx

* Βασικές τριγων. ταυτότητες (προκύπτουν από πυθ. θεώρ.) βλ. Άλγεβρα Β' Λυκείου

- $\text{συν}^2\partial + \text{ημ}^2\partial = 1$
- $\text{ημ}(2\partial) = 2\,\text{ημ}\partial\,\text{συν}\partial$

• Σημείωση: Κινούμαστε σε πεδίο μελέτης της Τριγωνομετρίας (Τα συν, ημ ορίστηκαν από τον Aryabhata περί το 500 μ.Χ.)

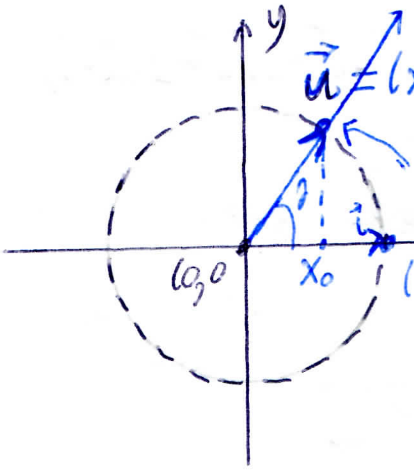
(28/02)



Ισχύει : $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu\theta$

(**Νόμος συνημιτόνων**)

(επέκταση του πυθ. θεωρ.)



$$\frac{(x,y)}{\|(x,y)\|} = (x_0, y_0) = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

$$x_0 = \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\Rightarrow (x_0, y_0)\cdot(1,0) = \sigma\upsilon\nu\theta,$$

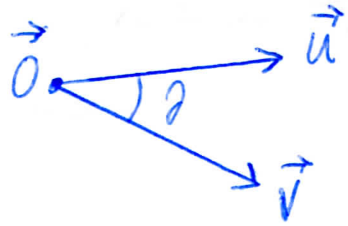
$$\vec{i} = (1,0)$$

$$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{i} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{i}\|\,\sigma\upsilon\nu\theta$$

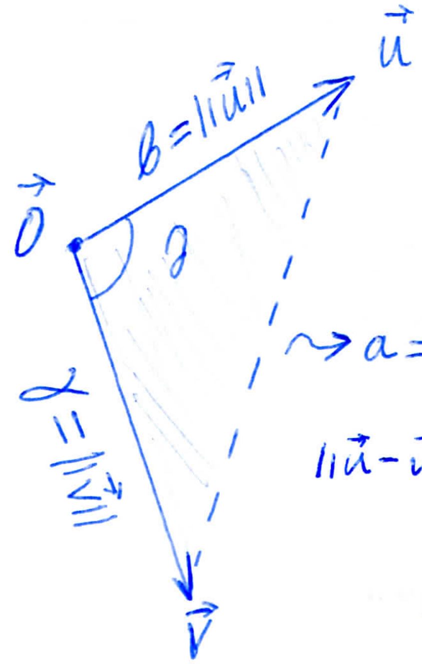
(*) • Ισχύει $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\,\sigma\upsilon\nu\theta, \quad \theta = \measuredangle(\vec{u},\vec{v})}$

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

Ιδιαιτέρως αν $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, τότε $\sigma\upsilon\nu\theta = \vec{u}\cdot\vec{v}$



(3ο μάθημα)



Αποδ

• $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot συνθ$
(από ν. συνημ.)

$\rightsquigarrow a = \|\vec{u}-\vec{v}\|$

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \langle \vec{u}-\vec{v}, \vec{u}-\vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Άρα, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ συνθ.

Ορισμός : Κάθετα διανύσματα.

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

Εάν $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ισοδύναμα με συνθ $=0$, δηλ: $\theta = \frac{\pi}{2}$

Ασκήσεις

1) $\vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{v} \perp \vec{u} \quad \forall \, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$
Ν.δ.ο. $\vec{v} = \vec{0}$

Λύση :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \quad \forall \, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{u} = \vec{v}$, $\vec{v}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \|\vec{v}\| = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

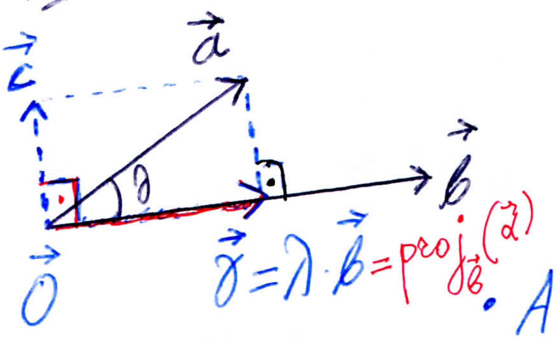
2) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\vec{a} \perp \vec{b} \overset{\text{ν.δ.ο.}}{\iff} \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$

Λύση

(*) $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \overset{(*)}{\iff} \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$

(Προβολή του $\vec{a}$ στο $\vec{b}$) $proj_{\vec{b}}(\vec{a})$ ... , $\vec{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}^n$



Τότε $\exists$ μοναδικά $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $\vec{a} = \lambda\vec{b} + \vec{c}$ με $\vec{c} \perp \vec{b}$

- Αν $\vec{a} = \vec{O}$, τότε $\lambda = 0$, $\vec{c} = \vec{O}$

- Αν $\vec{a} \neq \vec{O}$

$\vartheta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$

$\|\vec{\gamma}\| = \|\vec{a}\| \cdot \text{συν}\vartheta = \|\vec{a}\| \cdot \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$

Ισχύει όμως ότι $\|\vec{\gamma}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{b}\|$

Άρα $\lambda = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$

- $\vec{c} = \left(\vec{a} - \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \cdot \vec{b}\right) \perp \vec{b}$

Άρα $\vec{c} \perp \vec{b}$

$\boxed{\vec{\gamma} =: proj_{\vec{b}}(\vec{a})}$

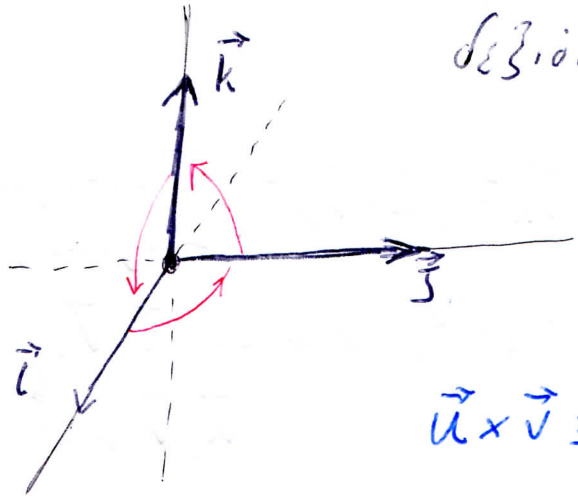
*Σημαντικά

Εξωτερικό, Μεικτό, γινόμενα στον $\mathbb{R}^3$

Γεωμετρική σημασία αυτών

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$

$\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$



δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων

$$\vec{u} \times \vec{v} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$=: \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\right)\vec{i} - \left(\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\right)\vec{j} + \left(\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right)\vec{k} =$$

$$= (u_2 v_3 - v_2 u_3,\ v_1 u_3 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - v_1 u_2)$$

Ιδιότητες

1) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

2) $\vec{v} \times (\lambda \vec{u}) = \lambda (\vec{v} \times \vec{u})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

3) $\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}}$

* 4) $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$

Τριπλό γινόμενο

(Γενικά)

<u>Δεν</u> ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα

Γεωμετρική ερμηνεία $\vec{u}\times\vec{v}$

i) $\vec{u}\times\vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v}$

ii) $\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2 = \|u\|^2 \, \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$ (Ταυτότητα Lagrange)

iii) $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cdot ημθ$, $θ = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$, $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$

Απόδειξη (iii)

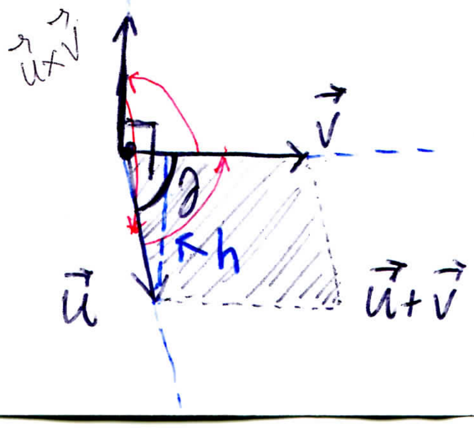
$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2 \underset{(ii)}{=} \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 =$$

$$= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 συν^2θ =$$

$$= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 ημ^2θ, \quad θ \in [0, π]$$

Άρα $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\, ημθ$.

* (Σημαντικό) iv) Έστω $\vec{u}, \vec{v} \ (\neq \vec{0})$, γρ. ανεξάρτητα.



E παραλληλόγραμμο με κορυφές $\vec{0}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}$

Το εμβαδόν το $E = \|\vec{u}\times\vec{v}\|$

Απόδειξη $\quad E\mu(E) = \|\vec{v}\|h = \|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\eta\mu\theta$

$\stackrel{(iii)}{=} \|\vec{u}\times\vec{v}\|$

Σημείωση: $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$, γρ. ανεξάρτητα το $\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}\}$ ορίζουν δεξιόστροφο σύστημα.