Ανάλυση ΙΙ - Μάθημα 02 - 25/02/2011

Ενότητα 1

- Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$

για $n = 1$, $\mathbb{R}$ πλήρες διατεταγμένο σώμα, των Πραγματικών Αριθμών (βλ. Αν. Ι)

για $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{εξ ορισμού}}}{\vec{x} =: \vec{y}} \Leftrightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \dots x_n = y_n$

Στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε πρόσθεση και βαθμωτό (scalar) πολλαπλασιασμό:

$(+)$: $\vec{x} + \vec{y} =: (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$

Ιδιότητες: Π_1 $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

Π_2 $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$

Π_3 $\exists$ $\vec{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n : \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Π_4 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ $\exists$ $-\vec{x} =: (-x_1, \dots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

(•) $\boxed{\lambda \in \mathbb{R}}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda \vec{x} =: (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$$

<u>Ιδιότητες</u>

<u>ΒΠ$_1$</u> $(\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x}), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

<u>ΒΠ$_2$</u> $(\lambda+\mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$

<u>ΒΠ$_3$</u> $\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$

<u>ΒΠ$_4$</u> $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}, \ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Άρα ο $\mathbb{R}^n$ είναι <u>γραμμικός (ή διανυσματικός) χώρος</u>

Η $\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0) \\ \vdots \\ \vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1) \end{array} \right.$ <u>Κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$</u>

δηλ. το $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ Γρ. ανεξάρτητο

και αν $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ τότε $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$

(25/02)

Τελικά

Ο $\mathbb{R}^n$ με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό είναι διανυσματικός χώρος, διάστασης n.

Σημείωση: Στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ δεν μπορεί να οριστεί διάταξη, όπως αυτή που έχει οριστεί στον $\mathbb{R}$ (ολική διάταξη)
Στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ δεν μπορεί να οριστεί πολλαπλασιασμός όπως αυτός που έχει οριστεί στον $\mathbb{R}$

Αναπαράσταση του $\mathbb{R}^n$ για $n = 1, 2, 3$

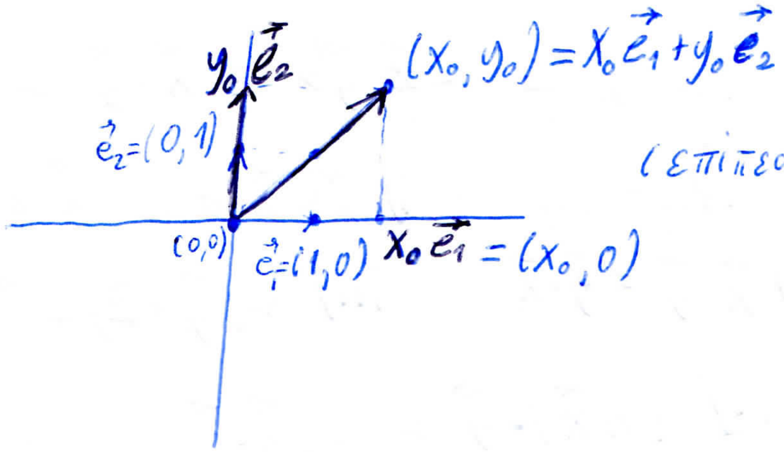
- $\mathbb{R}^n$, $(n = 1)$

  (Μονοδιάστατος χώρος)

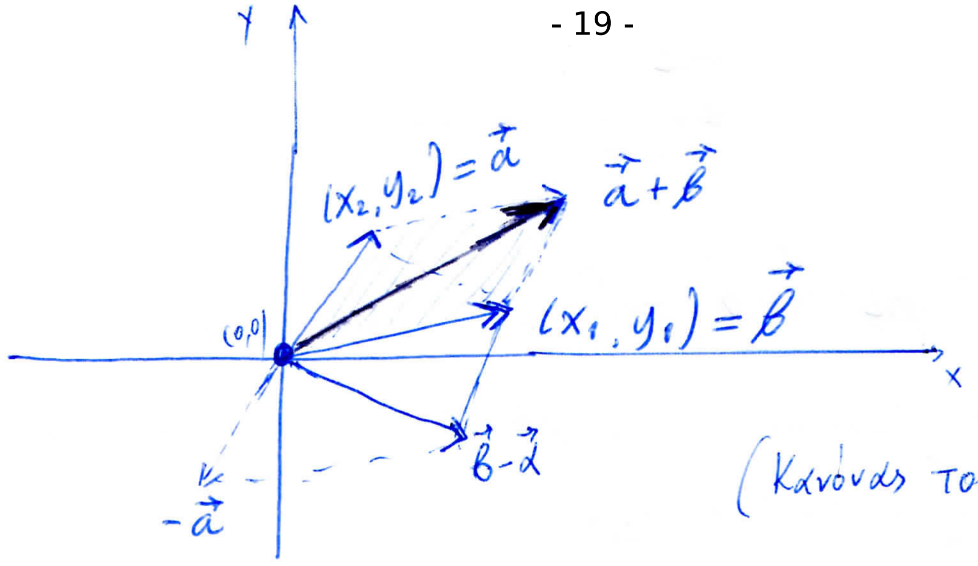
(ευθεία)

- $\mathbb{R}^2$, $(n = 2)$

  (Διδιάστατος χώρος)



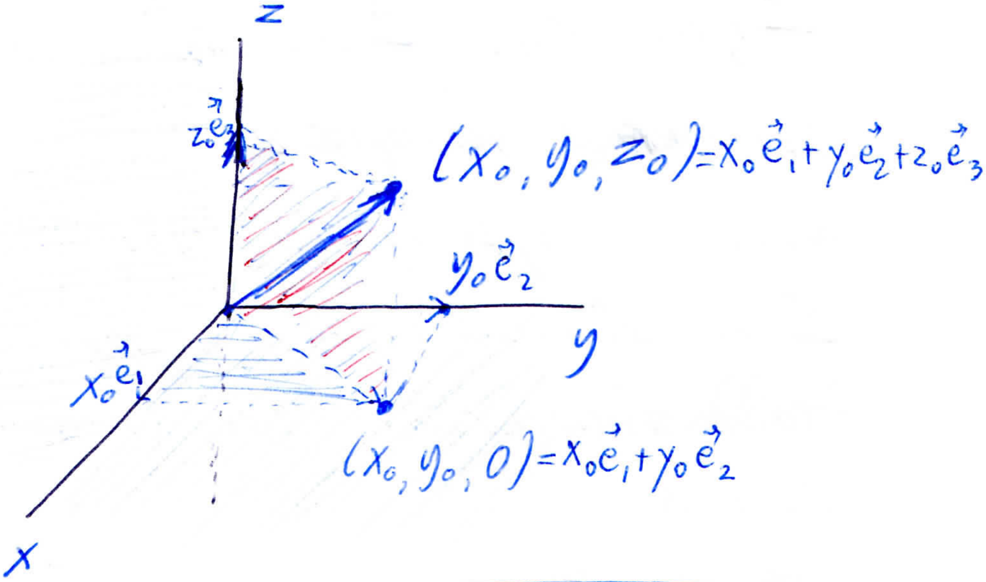
(επίπεδο)



(Κανόνας του παραλληλογράμμου)

• $\mathbb{R}^3$, $(n=3)$

(τρισδιάστατος χώρος)



Εσωτερικό γινόμενο

Ευκλείδεια νόρμα / απόσταση (μέτρο)

• $(\cdot\,,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Εσωτερικό γινόμενο των $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

το $(\vec{x}, \vec{y}) \equiv \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \equiv \vec{x} \cdot \vec{y} =: x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \in \mathbb{R}$

Ιδιότητες: i) $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, αν $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$ τότε $\vec{x} = \vec{0}$

ii) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ iii) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$

iv) $(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(25/02)

Ασκήσεις

1) Ν.δ.ο. (Ανισότητα Cauchy-Schwartz)

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ στον $\mathbb{R}^n$

τότε $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}\,\sqrt{\vec{y}\cdot\vec{y}}$ / Ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$|x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n| \leq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2} (y_1^2 + \ldots + y_n^2)^{1/2}$$

Λύση: αν $\vec{x} = \vec{0}$ ή $\vec{y} = 0$ Ισχύει $(0=0)$

Εστω $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$

Τυχαίο $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε $\overset{\text{από}}{(i)}$ $(\lambda\vec{x}+\vec{y})\cdot(\lambda\vec{x}+\vec{y}) \geq 0$

Άρα $\lambda^2(\vec{x}\cdot\vec{x}) + 2\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y}) + (\vec{y}\cdot\vec{y}) \geq 0$ (από ii, iii, iv)
(με $\vec{x}\cdot\vec{x} > 0$), για τυχαίο $\lambda \in \mathbb{R}$

(βλ. βιβλίο Λυκείου: Μελέτη τριωνύμου)

Άρα η διακρίνουσα $\Delta \leq 0 \Rightarrow$

$(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 - (\vec{x}\cdot\vec{x})(\vec{y}\cdot\vec{y}) \leq 0 \Rightarrow$

$(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \leq (\vec{x}\cdot\vec{x})(\vec{y}\cdot\vec{y}) \Rightarrow$

$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq (\vec{x}\cdot\vec{x})^{1/2}(\vec{y}\cdot\vec{y})^{1/2}$

<u>β' τρόπος Λύσης</u>: Με μαθηματική επαγωγή για το συγκεκριμένο εσ. γινόμενο

<u>Σημείωση</u>. Η λύση που δώσαμε είναι για εσ. γινόμενο σε τυχαίο χώρο.

2η ασκ.) Δοθέντων $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός $\mu \in \mathbb{R}$ με $|\mu| \leq 1$, $\mu = \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}\,\sqrt{\vec{y}\cdot\vec{y}}}$

• Ευκλείδεια νόρμα / μέτρο

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\|\vec{x}\| =: \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

$(\|\cdot\| \equiv |\cdot|)$

$\|\cdot\|_2$

Ιδιότητες : i) $\|\vec{x}\| \geq 0$ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Αν $\|\vec{x}\| = 0$ τότε $\vec{x} = \vec{0}$

ii) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\,\|\vec{x}\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (Τριγωνική ιδιότητα)

(υπόδ.: C-S ανισότητα)

Άρα, ο $\mathbb{R}^n$ έγινε διαν. χώρος με νόρμα.

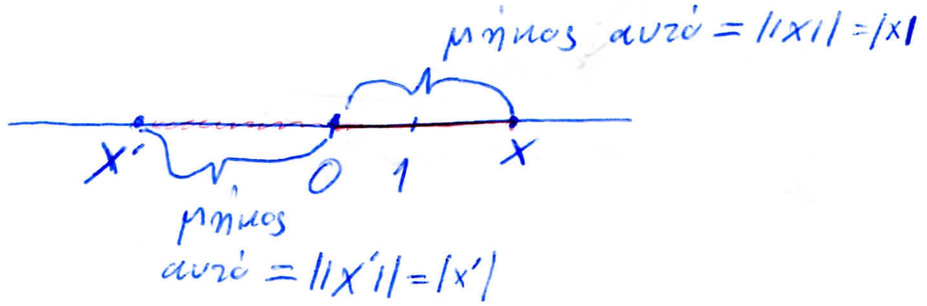
(25/02)

Απόσταση (Ευκλείδεια)

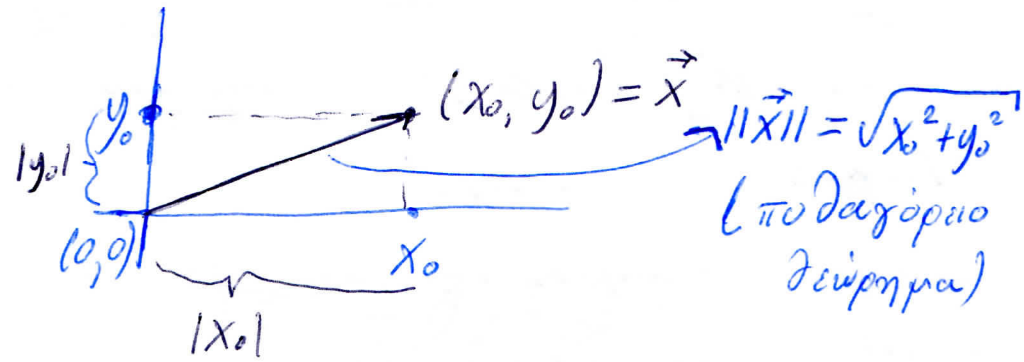
$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, Ευκ. απόστ. $d(\vec{x}, \vec{y}) =: \|\vec{x} - \vec{y}\|$

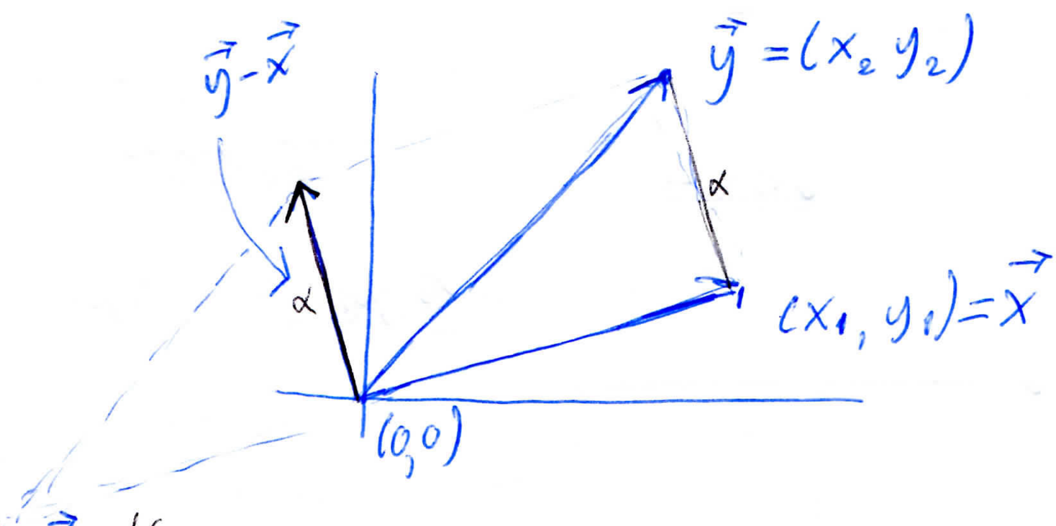
Αναπαράσταση της $\|\cdot\|$ και d για $n = 1, 2, 3$

• $\mathbb{R}, (n=1)$ $\quad \vec{x} = (x), \ \|\vec{x}\| = |x|$



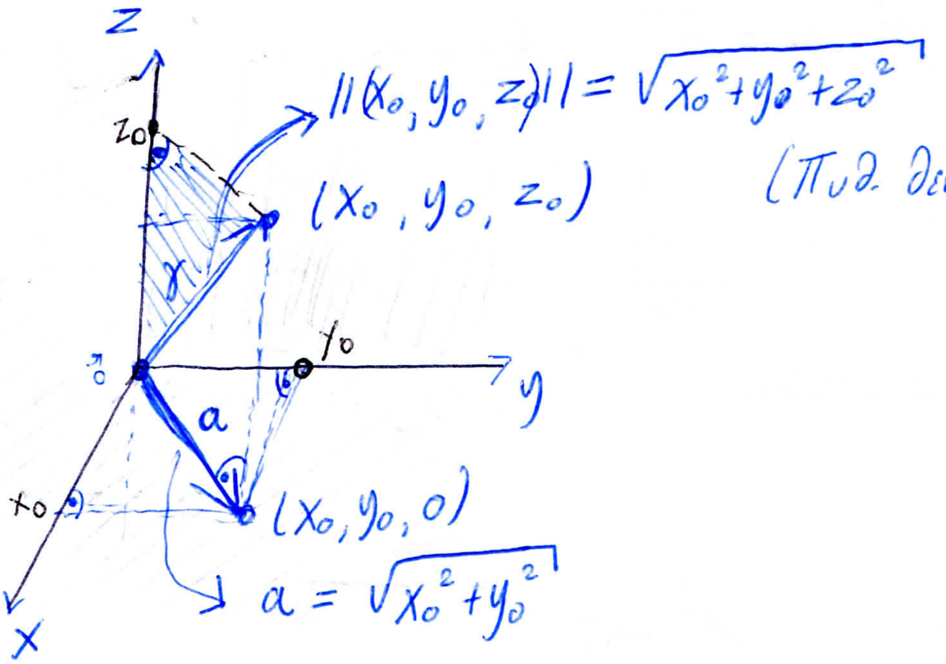
• $\mathbb{R}^2, (n=2)$





$-\vec{x}$, $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{y} - \vec{x}\| = \alpha$.

• $\mathbb{R}^3$, $(n=3)$

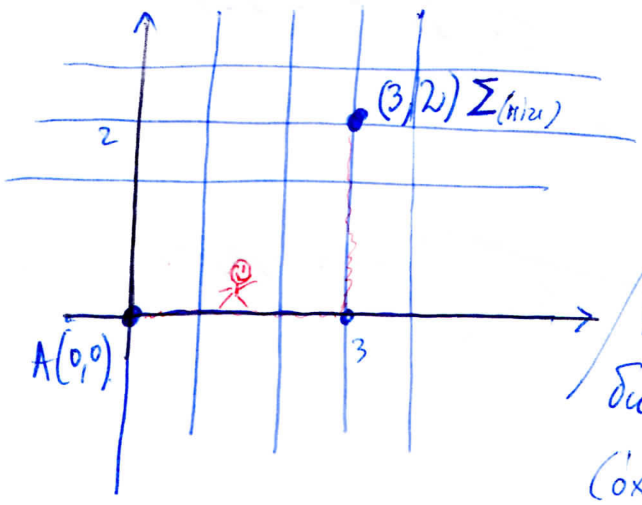


<u>Σημείωση:</u>

Στον $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 2)$, υπάρχουν άπειρες νόρμες / αποστάσεις.

Στην καθημερινή μας ζωή <u>δεν</u> χρησιμοποιούμε (γενικά) την Ευκλείδεια.

π.χ. : (Απόσταση MANHATTAN)



Έστω κάθε γραμμή ένας δρόμος

$\|(x_0, y_0)\|_1 = |x_0| + |y_0|$

Για να πάμε από το A στο Σ διανύουμε απόσταση $3+2=\underline{\underline{5}}$ χιλ.
(όχι $\sqrt{11} = \|(3,2)\|_2$ χιλ.)