Ανάλυση ΙΙ - Μάθημα 05 - 04/03/2011

Τοπολογία στον $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$

Ορισμοί

i) Έστω $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$.

Το $S(\vec{x}_0, r) =: \{ x \in \mathbb{R} : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r \}$ καλείται ανοιχτή σφαίρα (μπάλα του $\mathbb{R}^n$) κέντρου $\vec{x}_0$ και ακτίνας r.

ii) Έστω $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r \geq 0$

Το $\hat{S}(x_0, r) =: \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \vec{r} \}$ καλείται κλειστή σφαίρα κέντρου $\vec{x}_0$ και ακτίνας r.

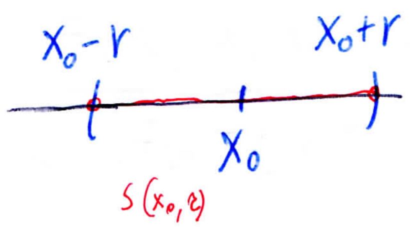
Παραδείγματα

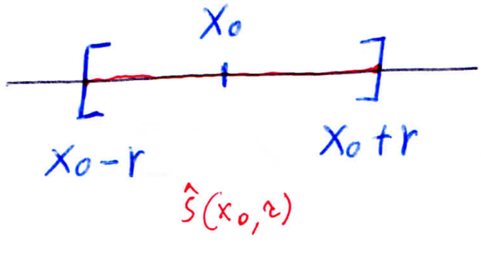
1. $n = 1$, $S(x_0, r) = \{ x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r \}$

$$= (x_0 - r,\ x_0 + r) \subseteq \mathbb{R}$$

$$\hat{S}(x_0, r) = \{ x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq r \}$$

$$= [x_0 - r,\ x_0 + r]$$

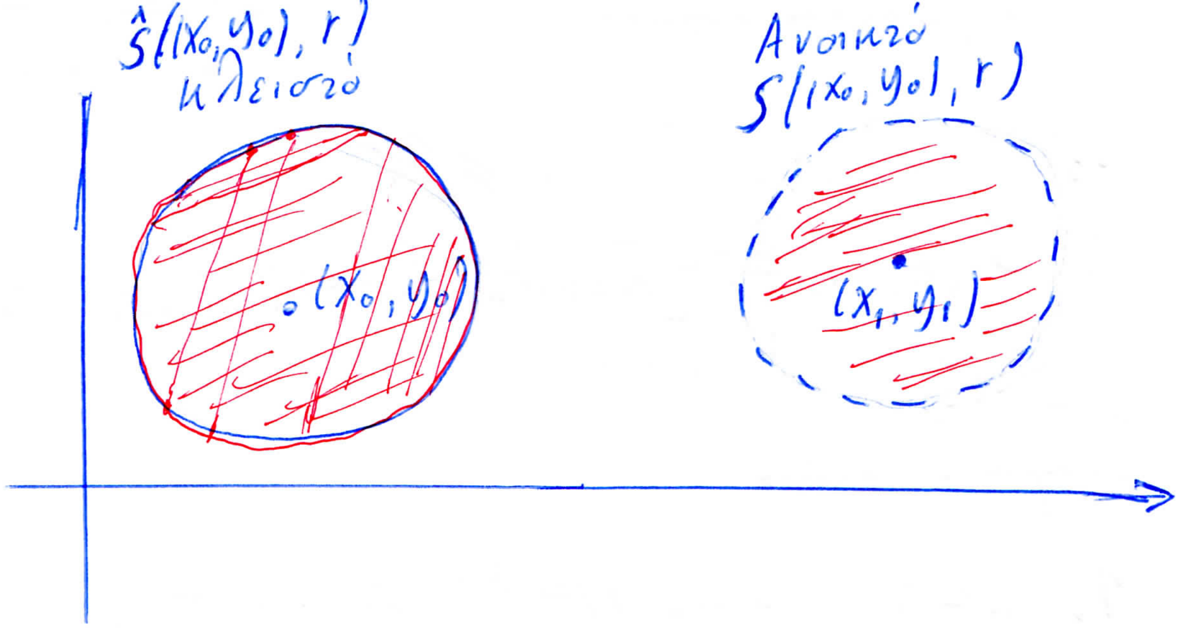




2. $n=2$

$$S((x_0,y_0),r)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \|(x,y)-(x_0,y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r\}$$

$$\hat{S}(\ldots)=\{\ \ldots\ \leq r\}$$

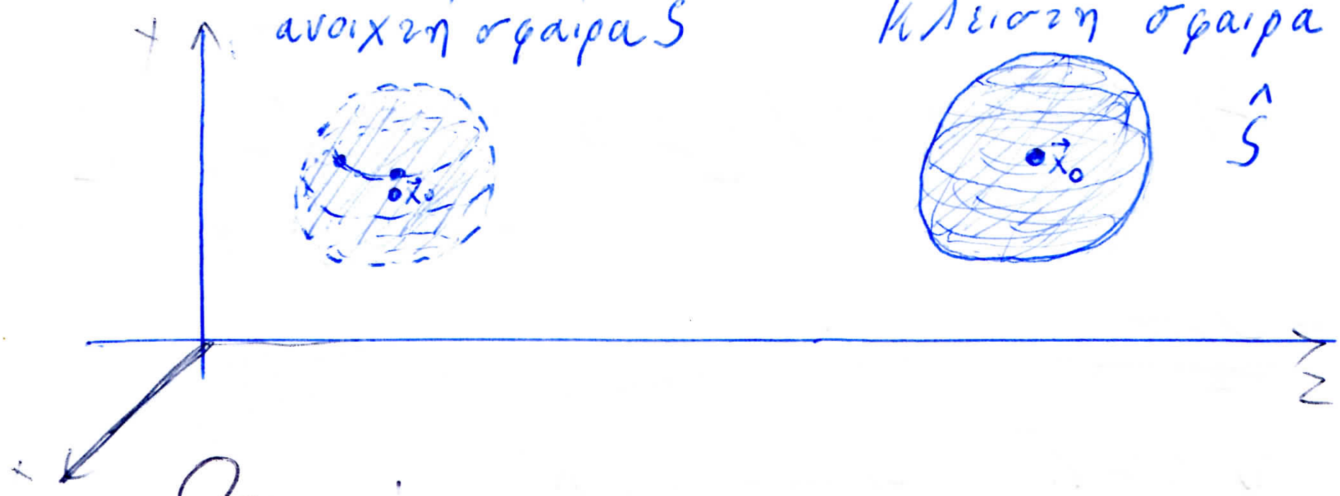


3. $n=3$

$$S((x_0,y_0,z_0),r)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<r\}$$

$$\hat{S}(\ldots)=\{\ \leq r\}$$

(04/03)



Ορισμοί

$$A \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

i) $\vec{x}_0$ <u>σημείο συσσώρευσης του A</u>

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \left(S(\vec{x}_0, \varepsilon) \setminus \{\vec{x}_0\}\right) \cap A \neq \emptyset$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \, \vec{a} \in A : 0 < \|\vec{x}_0 - \vec{a}\| < \varepsilon$$

ii) Εάν <u>$\vec{x}_0 \in A$</u> και <u>δεν</u> είναι σ.σ. του A, $\vec{x}_0$ <u>Μεμονωμένο σημείο</u> δηλ. $\exists \, \varepsilon_0 > 0$:

$$A \cap S(\vec{x}_0, \varepsilon_0) = \{\vec{x}_0\}$$

<u>Το σύνολο των σ.σ. του A συμβολίζεται με A'</u>

Παραδείγματα

1) $A = (0,1)$ ή $[0,1)$ ή $(0,1]$ ή $[0,+\infty)$ ...

$A' = [0,1]$ / $[0,+\infty)' = [0,+\infty)$

2) $B = (0,1) \cup \{2,3,\dots\}$, $B' = [0,1]$

τα 2, 3, ... είναι μεμ. σημεία του B.

Ορισμοί

1) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow \forall \vec{x} \in A \ \exists \ S(\vec{x}, r) \subseteq A$

2) $B \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό

$\Longleftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus B$ είναι ανοικτό

$\Longleftrightarrow B' \subseteq B$

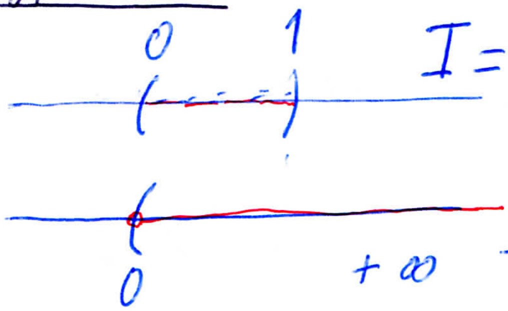
3) K φραγμένο $\Longleftrightarrow \exists \ M \in \mathbb{R}$:

$\|\vec{x}\| \leq M \quad \forall \vec{x} \in K \Longleftrightarrow K \subseteq \hat{S}(0, M)$

4) K συμπαγές $\Longleftrightarrow K =$ φραγμένο + κλειστό.

Παραδείγματα

1) $\mathbb{R}$



$I = (0,1)$

$I = (0, +\infty)$

Ανοικτά

$[0, 1]$ κλειστό

$[0, +\infty)$ κλειστό

2) $\mathbb{N}$ κλειστό

$\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτό

δεν είναι κλειστό

ομοίως

$[0, 1)$ δεν είναι ανοικτό ούτε κλειστό

$\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ Αν, + κλειστά

3) $n = 2$ / $\mathbb{R}^2$

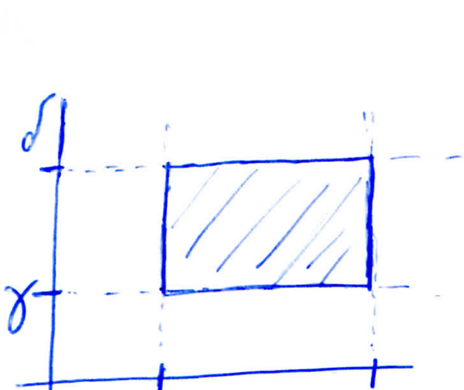
$S((x_0, y_0), r)$ ανοικτό σύνολο

$\hat{S}((x_0, y_0), r)$ κλειστό σύνολο

$B = [a, b] \times [\gamma, \delta]$

$= \{(x,y) : a \le x \le b, \; \gamma \le y \le \delta\}$

κλειστό σύνολο



4) $n = 3$ / $\mathbb{R}^3$

$S(\vec{x}_0, r)$ αν. σύνολο στον $\mathbb{R}^3$ $(\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3)$

$\hat{S}(\vec{x}_0, r)$ κλ. σύνολο (στον $\mathbb{R}^3$) $(\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3)$

$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

(κλειστό) Ορθογώνιο

5) $[0, 1]$, $\mathbb{N}$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, $(0, 1]$

$[0,1]$ ↓ Συμπαγές

$\mathbb{N}$ ↓ (κλειστό, όχι φραγμ.) όχι Συμπαγές

$\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ↓ Συμπαγές

$(0,1]$ ↓ Όχι συμπαγές (φραγμένο, όχι κλειστό)

(04/03)

Σύνορο συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\partial A \equiv \mathrm{bd}\,A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0,\ S(\vec{x},\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$
$$\text{και } S(\vec{x},\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset\}$$

Παραδείγματα

1) $A = [0,1], \ldots, (0,1), \quad (0,+\infty), \quad \mathbb{Q}$

$\partial A = \{0,1\}$

$\partial((0,+\infty)) = \{0\}$

$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

Ισχύει A κλειστό $\Longleftrightarrow \partial A \subseteq A$

2) $\partial S(\vec{x}_0, r) = \partial \hat{S}(\vec{X}_0\, r) =$

$= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = r\}$ (= επιφάνεια της σφαίρας)