Γραφικά & Οπτικοποίηση

Κεφάλαιο 3

2Δ & 3Δ Συστήματα Συντεταγμένων & Μετασχηματισμοί

Εισαγωγή

- Στα γραφικά με υπολογιστή συχνά πρέπει να μεταβληθεί:
  - Η μορφή των αντικειμένων
  - Το σύστημα συντεταγμένων
- Παραδείγματα:
  - Σε μια σκηνή, ένα ψηφιοποιημένο αυτοκίνητο μπορεί να χρησιμοποιείται σε διαφορετικά στιγμιότυπα: σε διάφορα σημεία, κατευθύνσεις και μεγέθη
  - Στην συνθετική κίνηση, ένα αντικείμενο μεταβάλλεται μεταξύ των καρέ
  - Καθώς αντικείμενα διασχίζουν την σωλήνωση γραφικών, αλλάζουν το σύστημα συντεταγμένων τους:

    Σύστημα Συντεταγμένων Αντικειμένου → Σύστημα Συντεταγμένων Κόσμου

    Σύστημα Συντεταγμένων Κόσμου → Σύστημα Συντεταγμένων Παρατηρητή
  - Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων:

    - Εργαλεία για μεταβολή αντικειμένων

    - Το σημαντικότερο κομμάτι των γραφικών

Εισαγωγή (2)

- 3Δ σημεία στον Ευκλείδειο χώρο E^3: 3 1 διανύσματα στήλες

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

- Γραμμικοί μετασχηματισμοί: - 3 3 πίνακες

  - πολλαπλασιάζονται **από αριστερά** με σημείο, παράγοντας νέο σημείο

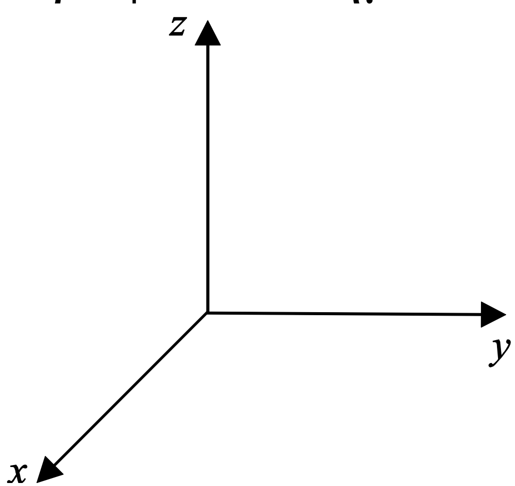
$$\begin{bmatrix} p_{x'} \\ p_{y'} \\ p_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Εισαγωγή (3)

- Αν αναπαριστούσαμε τα σημεία σαν διανύσματα γραμμής 1 3 $\mathbf{p} = [\, p_x \; p_y \; p_z \,]$ οι γραμμικοί μετασχηματισμοί θα έπρεπε να πολλαπλασιάζονται με το σημείο **από δεξιά**

$$\begin{bmatrix} p_{x'} & p_{y'} & p_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 & m_4 & m_7 \\ m_2 & m_5 & m_8 \\ m_3 & m_6 & m_9 \end{bmatrix}$$

- Χρησιμοποιούμε δεξιόστροφα συστήματα συντεταγμένων:



Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί - Συνδυασμοί

- Μαθηματικά: **Μετασχηματισμοί**:

  απεικονίσεις με πεδίο ορισμού και τιμών το ίδιο σύνολο

  (π.χ. $E^3 \rightarrow E^3$)

- Γραφικά Υπολογιστή & Οπτικοποίηση:

  Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί:

  μετασχηματισμοί που διατηρούν αναλλοίωτες σημαντικές γεωμετρικές ιδιότητες των μεταβαλλόμενων αντικειμένων

- Οι Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί διατηρούν τους Συσχετισμένους Συνδυασμούς

- Παραδείγματα συσχετισμένων συνδυασμών :
  - Ευθύγραμμα τμήματα, κυρτά πολύγωνα, τρίγωνα, τετράεδρα → δομικά συστατικά των μοντέλων

Συσχετισμένοι Συνδυασμοί

- Συσχετισμένος συνδυασμός των σημείων $\mathbf{p_0}, \mathbf{p_1}, ..., \mathbf{p_n} \in E^3$ είναι ένα σημείο $\mathbf{p} \in E^3$:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=0}^{n} a_i \ \mathbf{p_i}$$

όπου $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$

και $\sum_{i=0}^{n} a_i = 1$: συσχετισμένες συντεταγμένες του **p** ως προς τα $\mathbf{p_0}, \mathbf{p_1}, ..., \mathbf{p_n}$

- Κυρτός συσχετισμένος συνδυασμός:
  - Αν όλα τα $a_i \geq 0$, $i = 0,1,\ldots,n$
  - Ο συσχετισμένος συνδυασμός **p** βρίσκεται εντός του κυρτού περιβλήματος των αρχικών σημείων $\mathbf{p_0}, ..., \mathbf{p_n}$
  - π.χ. 1: Ευθ. Τμήμα μεταξύ των σημείων $\mathbf{p_1}$ και $\mathbf{p_2}$ είναι το σύνολο σημείων **p**:

    $\mathbf{p} = a_1 \cdot \mathbf{p_1} + a_2 \cdot \mathbf{p_2}$ με $0 \leq a_1 \leq 1$ και $a_2 = 1 - a_1$
  - π.χ. 2: Τρίγωνο με κορυφές $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{p_3}$ είναι το σύνολο σημείων **p**:

    $\mathbf{p} = a_1 \cdot \mathbf{p_1} + a_2 \cdot \mathbf{p_2} + a_3 \cdot \mathbf{p_3}$ με $0 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1$ και $a_1 + a_2 + a_3 = 1$

Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί

- Συσχετισμένος Μετασχηματισμός:
  - Μετασχηματισμός που διατηρεί τους συσχετισμένους συνδυασμούς
  - Διατηρεί τη σχέση μεταξύ των σημείων
- Ένας μετασχηματισμός $\Phi : E^3 \rightarrow E^3$ είναι συσχετισμένος αν

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi(\mathbf{p_i}) \text{ όπου } \mathbf{p} = \sum_{i=0}^{n} a_i \ \mathbf{p_i} \ : \ \text{συσχετισμένος συνδυασμός}$$

- Η εφαρμογή ενός συσχετισμένου μετασχηματισμού στο αποτέλεσμα **p** συσχετισμένου συνδυασμού *πρέπει να είναι ισοδύναμη* με τον συσχετισμένο συνδυασμό του συσχετισμένου μετασχηματισμού των σημείων ορισμού με τα ίδια βάρη a_i
- π.χ.

μέσο σημείο ευθυγράμμου τμήματος $\xrightarrow[\text{μετασχηματισμός}]{\text{συσχετισμένος}}$ μέσο σημείο μετασχηματισμένου ευθυγράμμου τμήματος

Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί (2)

- Πρακτική συνέπεια:
  - Τα εσωτερικά σημεία **δεν** χρειάζεται να μετασχηματιστούν
  - Αρκεί ο μετασχηματισμός των σημείων ορισμού
- Π.χ. εφαρμογή συσχετισμένου μετασχηματισμού σε τρίγωνο:
  - Μόνο στις 3 κορυφές και όχι στα (άπειρα) εσωτερικα σημεία

<u>Γενικός Συσχετισμένος Μετασχηματισμός</u>

Απεικόνιση μορφής $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \vec{\mathbf{t}}$ (1) όπου $\mathbf{A}$ ένας 3 3 πίνακας
$\vec{\mathbf{t}}$ ένας 3 1 πίνακας

είναι συσχετισμένος μετασχηματισμός στο E^3.

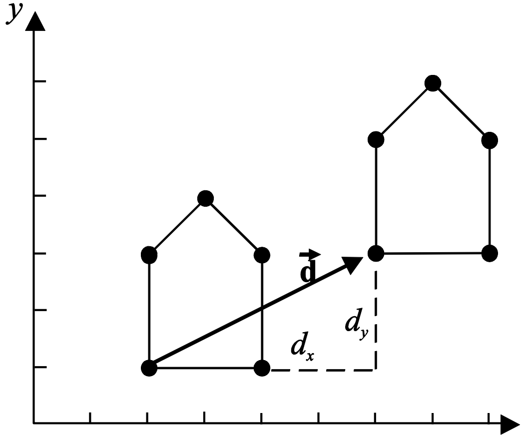
<u>Απόδειξη:</u> Θα δείξουμε ότι η (1) διατηρεί τους συσχετισμένους συνδυασμούς

$$\Phi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{p_i}\right) = \mathbf{A}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \mathbf{p_i}\right) + \vec{\mathbf{t}} = \sum_{i=0}^{n} a_i A \mathbf{p_i} + \sum_{i=0}^{n} a_i \vec{\mathbf{t}}$$

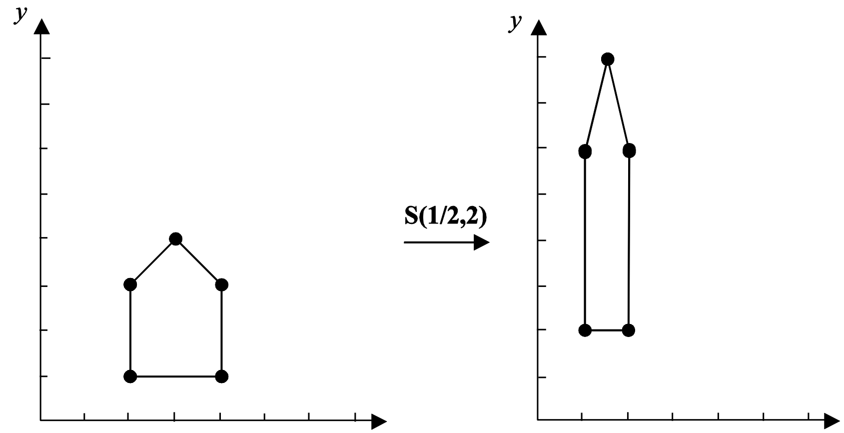
$$= \sum_{i=0}^{n} a_i (\mathbf{A}\, \mathbf{p_i} + \vec{\mathbf{t}}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi(\mathbf{p_i}).$$

2Δ Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί

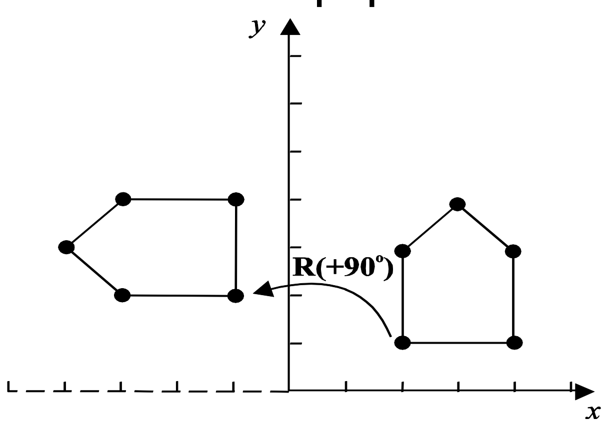
- Αποτελέσματα στις 2Δ γενικεύονται στις 3Δ
- 4 βασικοί συσχετισμένοι μετασχηματισμοί:



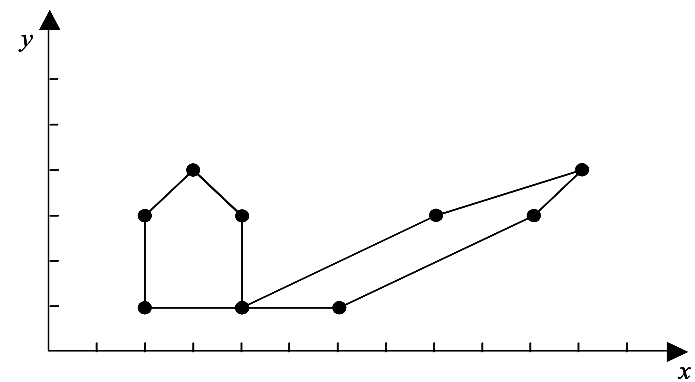
Μεταφορά



Αλλαγή Κλίμακας



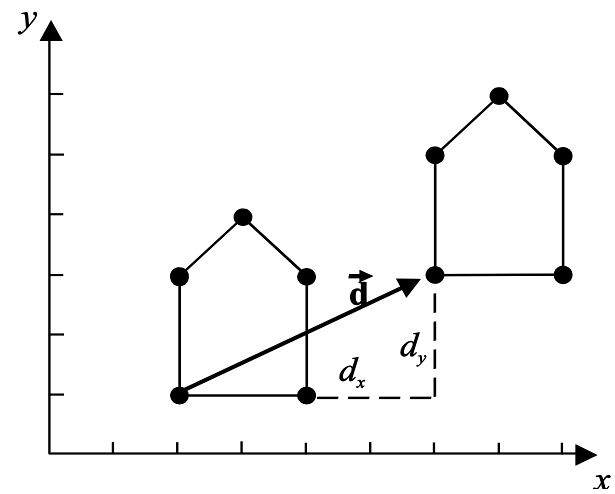
Περιστροφή



Στρέβλωση

Μεταφορά στις 2Δ

- Ορίζει κίνηση συγκεκριμένης απόστασης και κατεύθυνσης, που ορίζονται από το διάνυσμα μεταφοράς



- Η μετατόπιση στις 2Δ ενός σημείου $\mathbf{p}=[x,y]^T$ κατά διάνυσμα $\vec{\mathbf{d}}=[d_x,d_y]^T$ δίνει ένα νεό σημείο $\mathbf{p}'=[x',y']^T$

$$p' = p + \vec{d}$$

- Η μεταφορά είναι στιγμιότυπο του $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{p} + \vec{\mathbf{t}}$ όπου $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ και $\vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{d}}$ (**I** είναι ο ταυτοτικός πίνακας 2 2)

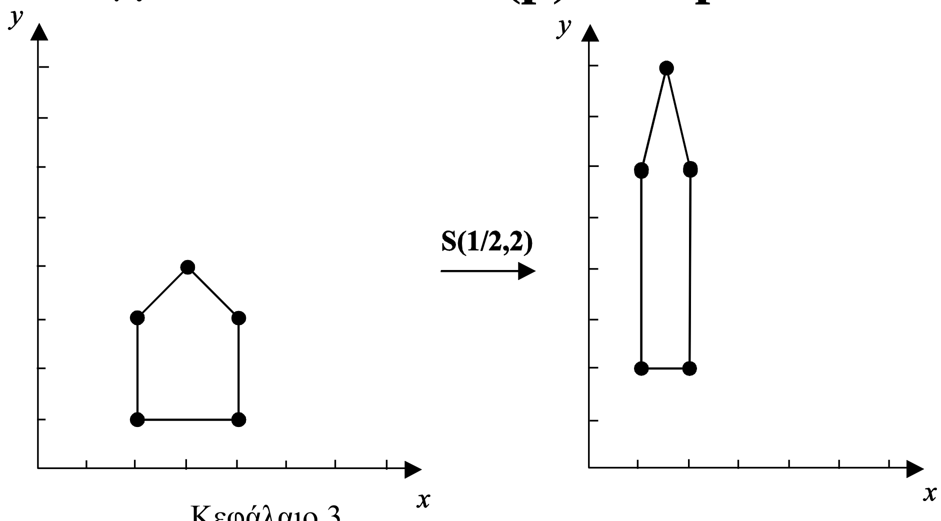
Αλλαγή Κλίμακας στις 2Δ

- Αλλάζει το μέγεθος των αντικειμένων
- Συντελεστής αλλαγής κλίμακας: ορίζει μεταβολή $\forall$ διάσταση
- 2Δ: s_x & s_y είναι οι συντελεστές αλλαγής κλίμακας που πολλαπλασιάζουν τις αντίστοιχες συντεταγμένες του **p**=[x, y]^T
- Αλλαγή κλίμακας στις 2Δ σημείου **p**=[x, y]^T δίνει το **p’**=[x’, y’]^T :

$$\mathbf{p}' = \mathbf{S}(s_x, s_y)\cdot \mathbf{p} \;\; \textit{οπου} \;\; \mathbf{S}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

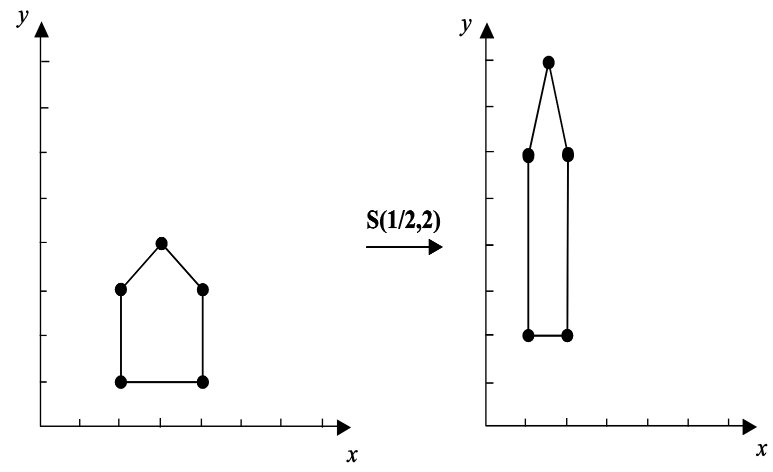
- Η αλλαγή κλίμακας είναι στιγμιότυπο του $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{p} + \vec{\mathbf{t}}$ όπου

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}(s_x, s_y) \text{ και } \vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{0}}$$



Αλλαγή Κλίμακας στις 2Δ (2)

- Αλλαγή κλίμακας σε σημείο δεν είναι παρατηρήσιμη
- Αν ο συντελεστής αλλαγής κλίμακας <1 → <u>συρρίκνωση</u> αντικειμένου
  ο συντελεστής αλλαγής κλίμακας >1 → <u>μεγέθυνση</u> αντικειμένου
- Παρενέργεια μεταφοράς (ανάλογη συντελεστή αλλαγής κλίμακας):
  - Μετακίνηση αντικειμένου προς την αρχή του άξονα *x* ($s_x < 1$)
  - Μετακίνηση αντικειμένου μακριά από την αρχή του άξονα *y* ($s_y > 1$)
- Ομοιόμορφη αλλαγή κλίμακας:
  - Αν όλοι οι συντελεστές αλλαγής κλίμακας είναι ίσοι (στις 2Δ $s_x = s_y$)
  - Διατηρεί τις αναλογίες των αντικειμένων
- Κατοπτρισμός:
  - Ειδική περίπτωση: Συντελεστής αλλαγής κλίμακας -1
  - Για τον άξονα *x*: **S**(1,-1) και για τον άξονα *y*: **S**(-1,1)



Περιστροφή στις 2Δ

- Περιστρέφει τα αντικείμενα γύρω από το κέντρο συντεταγμένων
- *Αλλάζει* ο *προσανατολισμός* αλλά *όχι* η *απόσταση* του αντικειμένου σε σχέση με το κέντρο
- Η αριστερόστροφη περιστροφή είναι θετική (αντίθετη δεικτών ρολ.)
- Το $\mathbf{p}' = [x', y']^T$ μπορεί να υπολογιστεί από το $\mathbf{p} = [x, y]^T$:

$$x' = l\cos(\phi+\theta) = l(\cos\phi\ \cos\theta - \sin\phi\ \sin\theta) = x\ \cos\theta - y\ \sin\theta$$

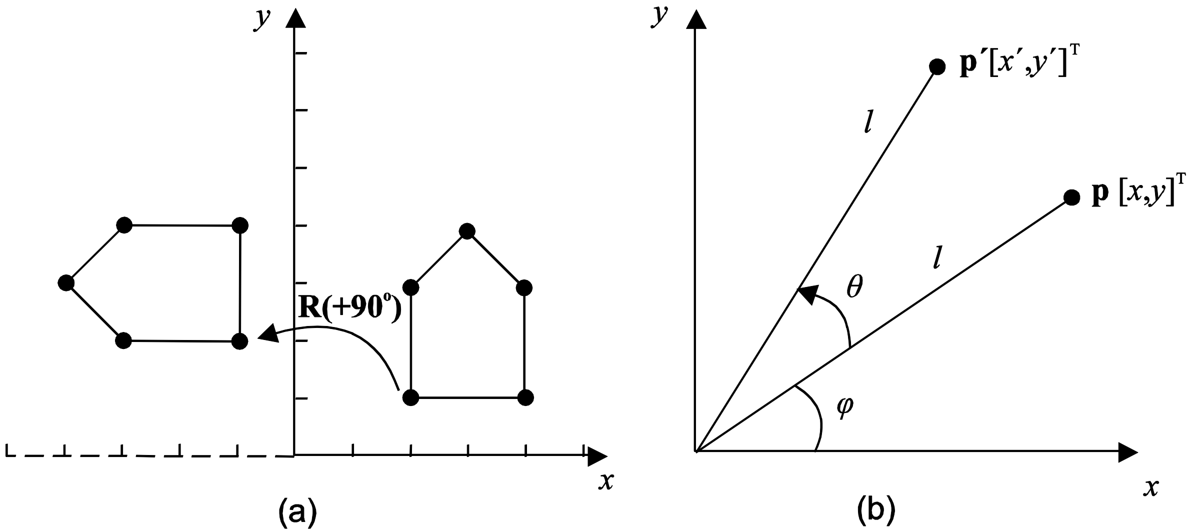
$$y' = l\sin(\phi+\theta) = l(\cos\phi\ \sin\theta + \sin\phi\ \cos\theta) = x\ \sin\theta + y\ \cos\theta$$

Έτσι: $$\mathbf{p}' = \mathbf{R}(\theta)\cdot\ \mathbf{p}$$

Περιστροφή στις 2Δ (2)

- Όπου:

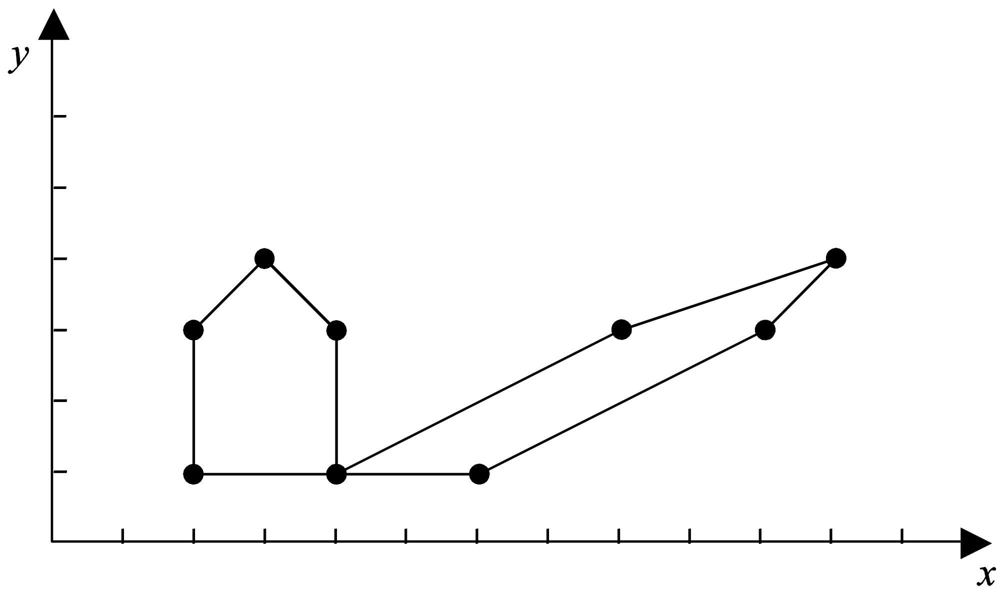
$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



- Η περιστροφή είναι στιγμιότυπο του $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \vec{\mathbf{t}}$ όπου $A = \mathbf{R}(\theta)$ και $\vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{0}}$

Στρέβλωση στις 2Δ

- Αυξάνει μια συντεταγμένη του αντικειμένου κατά ποσότητα ίση με μια άλλη συντεταγμένη επί τον παράγοντα στρέβλωσης
- Παράδειγμα: τραπουλόχαρτα που τοποθετούνται επίπεδα πάνω σε ένα τραπέζι και έπειτα τους προσδίδουμε κλίση χρησιμοποιώντας ένα σκληρό βιβλίο



Στρέβλωση στις 2Δ (2)

- Μπορούμε να υπολογίσουμε το $\mathbf{p}' = [x', y']^T$ από το $\mathbf{p} = [x, y]^T$:
  στρέβλωση στον άξονα x → $x' = x + ay, \;\; y' = y$
  στρέβλωση στον άξονα y → $x' = x, \;\; y' = bx + y$
  όπου α και b είναι οι αντίστοιχοι παράγοντες στρέβλωσης
- Σε μορφή πινάκων:

  στρέβλωση στον άξονα x → $\mathbf{p}' = \mathbf{SH_x}(a) \cdot \mathbf{p}$, όπου $\mathbf{SH_x}(a) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

  στρέβλωση στον άξονα y → $\mathbf{p}' = \mathbf{SH_y}(b) \cdot \mathbf{p}$, όπου $\mathbf{SH_y}(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$

- Η στρέβλωση είναι ένα στιγμιότυπο του συσχετισμένου μετασχηματισμού $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \vec{\mathbf{t}}$, όπου $\mathbf{A} = \mathbf{SH_x}(a)$ ή $\mathbf{A} = \mathbf{SH_y}(b)$ και $\vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{0}}$

Σύνθετοι Μετασχηματισμοί

- Πρακτικά, οι μετασχηματισμοί στα γραφικά και στην οπτικοποίηση σπάνια αποτελούνται από έναν απλό συσχετισμένο μετασχηματισμό
- Οι μετασχηματισμοί εφαρμόζονται σε όλα τα αντικείμενα της σκηνής
- Τα αντικείμενα ορίζονται από χιλιάδες ή εκατομμύρια κορυφές
- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Περιστροφή 2Δ αντικειμένου κατά 45^o και έπειτα ισότροπη αλλαγή κλίμακας κατά παράγοντα 2
  - Εφαρμογή πίνακα περιστροφής:

$$\mathbf{R}(45^\circ) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

  - Έπειτα εφαρμογή του πίνακα αλλαγής κλίμακας:

$$\mathbf{S}(2,2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Σύνθετοι Μετασχηματισμοί (2)

- Εφαρμογή των πινάκων ακολουθιακά σε κάθε κορυφή **p**:

S(2, 2) (**R**(45^o) **p**) → ΜΗ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟ

- Εναλλακτικά: Χρήση της *προσεταιριστικής ιδιότητας* του πολλαπλασιασμού πινάκων & εφαρμογή του (προυπολογισμένου) αποτελέσματος στις κορυφές:

(**S**(2, 2) **R**(45^o) **)p** → ΠΙΟ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟ

- Ο σύνθετος μετασχηματισμός υπολογίζεται **μόνο μια φορά** και εφαρμόζεται στις κορυφές
- Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι *αντιμεταθετικός* → η σειρά πολλαπλασιασμού των πινάκων έχει σημασία
- Έχοντας επιλέξει αναπαράσταση των σημείων σαν στήλες → οι πίνακες μετασχηματισμού πολλαπλασιάζουν από αριστερά τα σημεία → ο σύνθετος πίνακας υπολογίζεται με αντίθετη σειρά από την σειρά εφαρμογής

Σύνθετοι Μετασχηματισμοί (3)

- Δηλαδή για την εφαρμογή των μετασχηματισμών **T1,T2, ...,Tm,** υπολογίζουμε τον σύνθετο πίνακα **Tm ·... ·T2 ·T1**

- Πρόβλημα με τον μετασχηματισμό μεταφοράς: Η μεταφορά δεν μπορεί να περιγραφεί από ένα πίνακα γραμμικού μετασχηματισμού όπως:

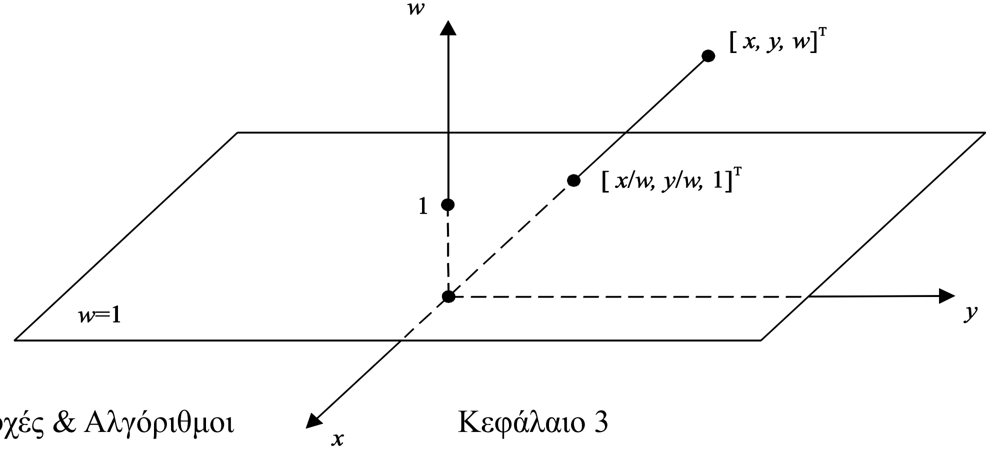
$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy$$

- Η μεταφορά δεν μπορεί να είναι μέρος σύνθετου μετασχηματισμού

- Λύση στο πρόβλημα αυτό → *ομογενείς συντεταγμένες*

Ομογενείς Συντεταγμένες

- Οι ομογενείς συντεταγμένες χρησιμοποιούν μια επιπλέον διάσταση από το χώρο που αναπαρίσταται
- Χώρος 2Δ : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$, όπου w η νέα συντεταγμένη που αναπαριστά την επιπλέον διάσταση. Ισχύει $w \neq 0$
- Θέτοντας w=1 διατηρούμε την αρχική μας χωρική διάσταση επιλέγοντας το «επίπεδο» w=1
- Στις 2Δ χρησιμοποιείται το επίπεδο w=1 αντί του επιπέδου xy



Ομογενείς Συντεταγμένες (2)

- Σημεία των οποίων οι ομογενείς συντεταγμένες είναι πολλαπλάσιες, είναι ισοδύναμα:

  π.χ., τα $[1,2,3]^T$ και $[2,4,6]^T$ παριστούν το ίδιο σημείο

- Το ακριβές σημείο που παριστάνουν δίνεται από την μοναδική *βασική αναπαράσταση*, για την οποία ισχύει $w = 1$ και δίνεται από την διαίρεση όλων των συντεταγμένων με το w:

$$[x/w, y/w, w/w]^T = [x/w, y/w, 1]^T$$

- Γενικά, η βασική αναπαράσταση χρησιμοποιείται για την παράσταση σημείων και εξασφαλίζουμε ότι οι μετασχηματισμοί την διατηρούν

Ομογενείς Συντεταγμένες (3)

- Πως λειτουργεί η μεταφορά με ομογενείς συντεταγμένες;

- Εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι ισχύει *w*=1 για την αναπαράσταση της μεταφοράς σημείου **p** = [x, y, w]^T κατά διάνυσμα $\vec{\mathbf{d}} = [d_x, d_y]$ σαν γραμμικό μετασχηματισμό:

$$x' = 1x + 0y + d_x w = x + d_x$$
$$y' = 0x + 1y + d_y w = y + d_y$$
$$w' = 0x + 0y + 1w = 1$$

- Ο μετασχηματισμός της *w* συντεταγμένης εξασφαλίζει ότι το προκύπτον $\mathbf{p}' = [x', y', w']^T$ σημείο έχει $w' = 1$

Ομογενείς Συντεταγμένες (4)

- Οι παραπάνω γραμμικές εκφράσεις συνοψίζονται σε μορφή πίνακα → η μεταφορά λειτουργεί ακριβώς όπως και οι άλλοι συσχετισμένοι μετασχηματισμοί

- Στους μη ομογενείς μετασχηματισμούς, η αρχή των αξόνων $[0, 0]^T$ είναι *σταθερό σημείο*:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Άλλο πλεονέκτημα ομογενών συντεταγμένων: δεν υπάρχει σταθερό σημείο στους ομογενείς συσχετισμένους μετασχηματισμούς

Ομογενείς Συντεταγμένες (5)

- Αρχή των αξόνων στις 2Δ είναι $[0, 0, 1]^T$ & δεν είναι σταθερό σημείο

- Το σημείο $[0, 0, 0]^T$ είναι εκτός του επιπέδου $w = 1$ → μη επιτρεπόμενο καθότι $w = 0$

- Από εδώ και στο εξής τα σημεία θα αναπαρίστανται με τις ομογενείς τους συντεταγμένες:

$$2Δ \rightarrow [x, y, 1]^T$$

$$3Δ \rightarrow [x, y, z, 1]^T$$

Ομογενείς Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί στις 2Δ

- Ομογενής πίνακας μεταφοράς στις 2Δ:

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{d}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Χρήση μεταφοράς όπως και των άλλων βασικών συσχετισμένων μετασχηματισμών:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{d}}) \cdot \mathbf{p}$$

- Η τελευταία γραμμή του ομογενούς πίνακα μετασχηματισμών είναι πάντα [0, 0, 1] → διατηρεί τιμή συντεταγμένης w (1)
- Ομογενής πίνακας αλλαγής κλίμακας στις 2Δ :

$$\mathbf{S}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ομογενείς Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί στις 2Δ (2)

- Ομογενής πίνακας περιστροφής στις 2Δ:

$$\mathbf{R}(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- Ομογενείς πίνακες στρέβλωσης στις 2Δ:

Στρέβλωση στον άξονα x → $\mathbf{SH_x}(a)=\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Στρέβλωση στον άξονα y → $\mathbf{SH_y}(b)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ b & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Αντίστροφοι Ομογενείς Μετασχηματισμοί στις 2Δ

- Συχνά είναι απαραίτητη η αντιστροφή ενός μετασχηματισμού
- Αντίστροφος ομογενής πίνακας μεταφοράς στις 2Δ:

$$\mathbf{T}^{-1}(\vec{\mathbf{d}}) = \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{d}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Αντίστροφος ομογενής πίνακας αλλαγής κλίμακας στις 2Δ:

$$\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y) = \mathbf{S}\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντίστροφοι Ομογενείς Μετασχηματισμοί στις 2Δ (2)

- Αντίστροφος ομογενής πίνακας περιστροφής στις 2Δ:

$$\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Αντίστροφος ομογενής πίνακας στρέβλωσης στις 2Δ:

στρέβλωση στον άξονα x → $\mathbf{SH}_{\mathbf{x}}^{-1}(a) = \mathbf{SH}_{\mathbf{x}}(-a) = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

στρέβλωση στον άξονα x → $\mathbf{SH}_{\mathbf{y}}^{-1}(b) = \mathbf{SH}_{\mathbf{y}}(-b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Αντίστροφοι Ομογενείς Μετασχηματισμοί στις 2Δ (3)

- Η εφαρμογή ενός μετασχηματισμού πάνω σε ένα αντικείμενο είναι ισοδύναμη με την εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού πάνω στο σύστημα συντεταγμένων (*μετασχηματισμός αξόνων*)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- Η ισοτροπική αλλαγή κλίμακας σε ένα αντικείμενο κατά συντελεστή 2 είναι ισοδύναμη με την ισοτροπική αλλαγή κλίμακας στους άξονες του συστήματος συντεταγμένων κατά συντελεστή ½ (*συρρίκνωση*)

Ιδιότητες Ομογενών Πινάκων

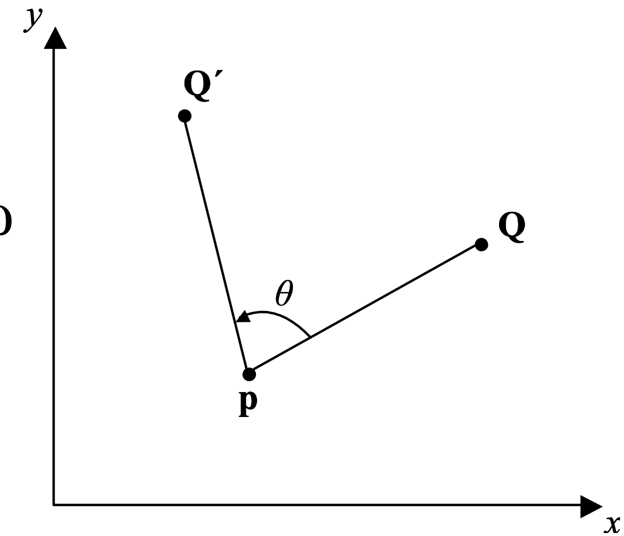
Ιδιότητες πινάκων ομογενών συσχετισμένων μετασχηματισμών:

- → $\mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{d1}})\cdot\mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{d2}}) = \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{d2}})\cdot\mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{d1}}) = \mathbf{T}(\overrightarrow{\mathbf{d1}} + \overrightarrow{\mathbf{d2}})$
- → $\mathbf{S}(s_{x1}, s_{y1})\cdot\mathbf{S}(s_{x2}, s_{y2}) = \mathbf{S}(s_{x2}, s_{y2})\cdot\mathbf{S}(s_{x1}, s_{y1}) = \mathbf{S}(s_{x1}\cdot s_{x2}, s_{y1}\cdot s_{y2})$
- → $\mathbf{R}(\theta 1)\cdot\mathbf{R}(\theta 2) = \mathbf{R}(\theta 2)\cdot\mathbf{R}(\theta 1) = \mathbf{R}(\theta 1 + \theta 2)$
- → $\mathbf{S}(s_x, s_y)\cdot\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}(\theta)\cdot \mathbf{S}(s_x, s_y)$ μόνο για ισοτροπική αλλαγή κλίμακας (s_x=s_y)

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 1

Παράδειγμα 1: Περιστροφή γύρω από σημείο

Προσδιορισμός του πίνακα μετασχηματισμού R(θ, p) που απαιτείται για την περιστροφή γύρω από σημείο **p** κατά γωνία *θ*



Λύση:

- Βήμα 1: Μεταφορά κατά $-\vec{\mathbf{p}}, \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$
- Βήμα 2: Περιστροφή κατά θ, $\mathbf{R}(\theta)$
- Βήμα 3: Μεταφορά κατά $\vec{\mathbf{p}}, \mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}})$

$$\mathbf{R}(\theta,\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & p_x - p_x\cos\theta + p_y\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & p_y - p_x\sin\theta - p_y\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 2

Παράδειγμα 2: Περιστροφή τριγώνου γύρω από σημείο

Περιστροφή τριγώνου $\triangle abc$ κατά 45° γύρω από σημείο **p**=[-1,-1]^T, όπου **a**=[0,0]T, **b**=[1,1]^T και **c**=[5,2]^T

Λύση:

- Το τρίγωνο αναπαρίσταται με τον πίνακα: $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}0&1&5\\0&1&2\\1&1&1\end{bmatrix}$
- Εφαρμογή **R**(θ, **p**) [Παρ. 1] στο τρίγωνο:

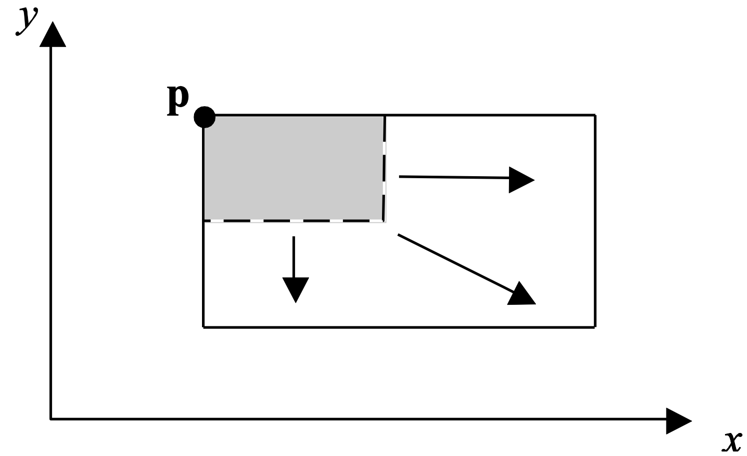
$$\mathbf{R}(45^\circ,[-1,-1]^T)\cdot\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-1\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\sqrt{2}-1\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&5\\0&1&2\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&\frac{3}{2}\sqrt{2}-1\\\sqrt{2}-1&2\sqrt{2}-1&\frac{9}{2}\sqrt{2}-1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

- Το προκύπτον τρίγωνο είναι το $\triangle a'b'c'$ όπου **a'**=[-1,$\sqrt{2}-1$]^T, **b'**=[-1,$2\sqrt{2}-1$]^T και **c'**=[$\frac{3}{2}\sqrt{2}-1,\frac{9}{2}\sqrt{2}-1$]^T

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 3

Παράδειγμα 3: Αλλαγή κλίμακας ως προς τυχαίο σημείο

Κατασκευή πίνακα μετασχηματισμού $\mathbf{S}(s_x,s_y,\mathbf{p})$ για αλλαγή κλίμακας κατά s_x και s_y ως προς τυχαίο (σταθερό) σημείο $\mathbf{p}$



Λύση:

- Βήμα 1: Μεταφορά κατά $-\vec{\mathbf{p}}, \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$
- Βήμα 2: Αλλαγή κλίμακας κατά s_x και s_y , $\mathbf{S}(s_x,s_y)$
- Βήμα 3: Μεταφορά κατά $\vec{\mathbf{p}}, \mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}})$

$$\mathbf{S}(s_x,s_y,\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & p_x - p_x s_x \\ 0 & s_y & p_y - p_y s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 4

Παράδειγμα 4: Αλλαγή κλίμακας τριγώνου ως προς σημείο

Διπλασιασμός του μήκους των πλευρών τριγώνου $\triangle abc$ κρατώντας σταθερή την κορυφή **c**. Οι συντεταγμένες των κορυφών είναι **a**=$[0,0]^T$, **b**=$[1,1]^T$, **c**=$[5,2]^T$

Λύση:

- Το τρίγωνο αναπαρίσταται από τον πίνακα **T** [Παρ. 2]
- Εφαρμογή πίνακα **S**(s_x,s_y,**p**) [Παρ. 3] στο τρίγωνο, θέτοντας τους παράγοντες αλλαγής κλίμακας =2 και **p=c**

$$\mathbf{S}(2,2,[5,2,1]^T)\cdot\mathbf{T}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -5\\0 & 2 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 5\\0 & 1 & 2\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -3 & 5\\-2 & 0 & 2\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

- Το νέο τρίγωνο είναι το $\triangle a'b'c'$ με **a'**=$[-5,-2]^T$, **b'**=$[-3,0]^T$ **c'**=$[5,2]^T$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 5

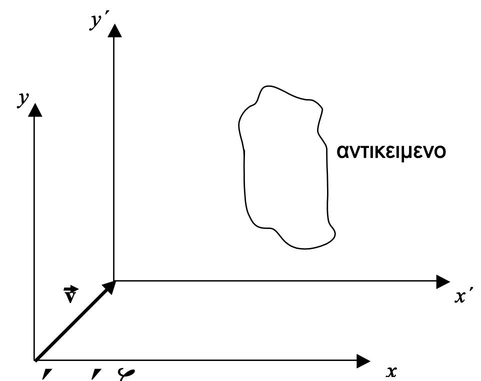
Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός άξονα

Έστω ότι το σύστημα συντεταγμένων μεταφέρεται κατά διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}} = [v_x, v_y]^T$. Κατασκευάστε τον πίνακα που περιγράφει το παραπάνω

Λύση:

- Ο ζητούμενος πίνακας μετασχηματισμού πρέπει να παράγει τις συντεταγμένες των αντικειμένων ως προς το νέο σύστημα συντεταγμένων. Αυτό επιτυγχάνεται με εφαρμογή τις αντίστροφης μεταφοράς στα αντικείμενα:

$$\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_x \\ 0 & 1 & -v_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$



- Όμοια, για οποιοδήποτε μετασχηματισμό άξονα:
  - Ζητούμενο → Εφαρμογή αντίστροφου μετασχηματισμού στα αντικείμενα

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 6

Παράδειγμα 6: Κατοπτρισμός σε τυχαίο άξονα

Κατασκευή πίνακα μετασχηματισμού για κατοπτρισμό σε τυχαίο άξονα που ορίζεται από σημείο $\mathbf{p}=[p_x,p_y]^{\mathrm{T}}$ και κατεύθυνση $\vec{\mathbf{v}}=[v_x, v_y]^T$

Λύση:

- Βήμα 1: Μεταφορά κατά $-\vec{\mathbf{p}}, \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$
- Βήμα 2: Περιστροφή κατά $-\theta$ (φορά ρολογιού), $\mathbf{R}(-\theta)$,

  θ η γωνία που σχηματίζει ο άξονας x και το διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}}$ και:

$$\sin\theta = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \qquad \cos\theta = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

(Τα 2 παραπάνω βήματα ταυτίζουν τον τυχαίο άξονα με τον x)

- Βήμα 3: Κατοπτρισμός στον άξονα x, $\mathbf{S}(1, -1)$
- Βήμα 4: Περιστροφή κατά θ, $\mathbf{R}(\theta)$

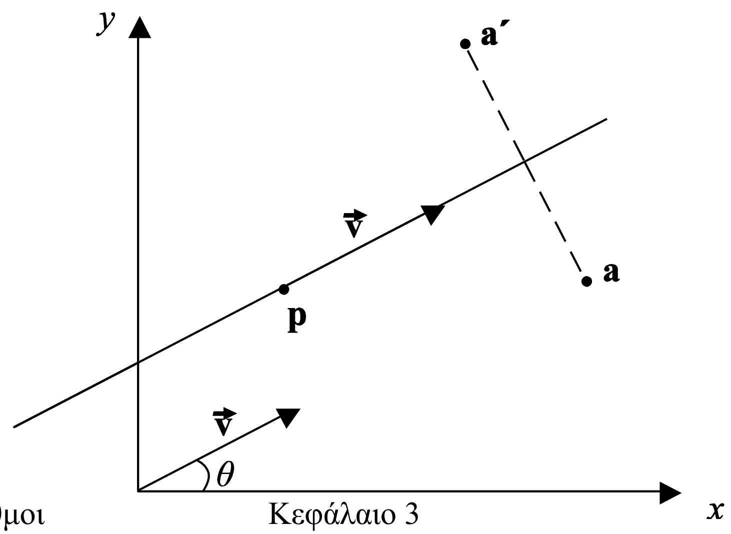
2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 6 (2)

- Βήμα 5: Μεταφορά κατά $\vec{\mathbf{p}}, \mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}})$

Συνεπώς έχουμε:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{SYM}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta & p_x - p_x(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2p_y\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta & p_y - p_y(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - 2p_x\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 7

Παράδειγμα 7: Κατοπτρισμός Πολυγώνου

Δοθέντος ενός πολυγώνου, κατασκευάστε τον κατοπτρισμό του ως προς α) την γραμμή *y*=2 και (β) τον άξονα που ορίζεται από το σημείο **p**=$[0,2]^T$ και το διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}} = [1,1]^T$. Το πολύγωνο δίνεται από τις κορυφές του **a**=$[-1,0]^T$, **b**=$[0,-2]^T$, **c**=$[1,0]^T$ και **d**=$[0,2]^T$

Λύση:

Το πολύγωνο αναπαρίσταται από τον πίνακα: $\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- Στην περίπτωση (α) **p**=$[0,2]^T$ και $\vec{\mathbf{v}} = [1,0]^T$ έτσι θ=0°, sinθ=0, cosθ=1 και έχουμε:

$$\Pi' = \mathbf{M_{SYM}} \cdot \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 7 (2)

- Στην περίπτωση (β) **p**=[0,2]^T και $\vec{\mathbf{v}} = [1,1]^T$, έτσι $\sin\theta = \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

και έχουμε:

$$\Pi' = \mathbf{M_{SYM}} \cdot \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{M_{SYM}}$ είναι ο πίνακας του [Παρ. 6]

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 8

Παράδειγμα 8: Μετασχηματισμός Παράστασης

Τα περιεχόμενα ενός 2Δ παραθύρου πρέπει να μεταφερθούν σε ένα 2Δ 'πεδίο παράστασης'. Το παράθυρο και το 'πεδίο παράστασης' είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα με πλευρές παράλληλες στους άξονες *x*, *y*. Προσδιορίστε τον πίνακα μετασχηματισμού παράστασης. Επίσης προσδιορίστε την παραμόρφωση των αντικειμένων με βάση τον Μετασχηματισμό αυτό.

Λύση:

Έστω ότι το παράθυρο και το πεδίο παράστασης ορίζονται από δυο κορυφές $[w_{xmin}, w_{ymin}]^T, [w_{xmax}, w_{ymax}]^T$ και $[v_{xmin}, v_{ymin}]^T, [v_{xmax}, v_{ymax}]^T$

- Βήμα 1: Μεταφορά του $[w_{xmin}, w_{ymin}]^T$ στην αρχή των αξόνων, χρησιμοποιώντας $\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{w}}_{\mathbf{min}})$ με $\vec{\mathbf{w}}_{\mathbf{min}} = [w_{xmin}, w_{ymin}]^T$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 8 (2)

- Βήμα 2: Αλλαγή κλίμακας του παραθύρου στο μέγεθος του πεδίου παράστασης, με **S**(s_x, s_y) όπου

$$s_x = \frac{v_{xmax} - v_{xmin}}{w_{xmax} - w_{xmin}} \qquad s_y = \frac{v_{ymax} - v_{ymin}}{w_{ymax} - w_{ymin}}$$

- Βήμα 3: Μεταφορά του πεδίου παράστασης κατά την κορυφή $[v_{xmin}, v_{ymin}]^T$ με $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{min}})$, όπου $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{min}} = [v_{xmin}, v_{ymin}]^T$

  Συνεπώς έχουμε:

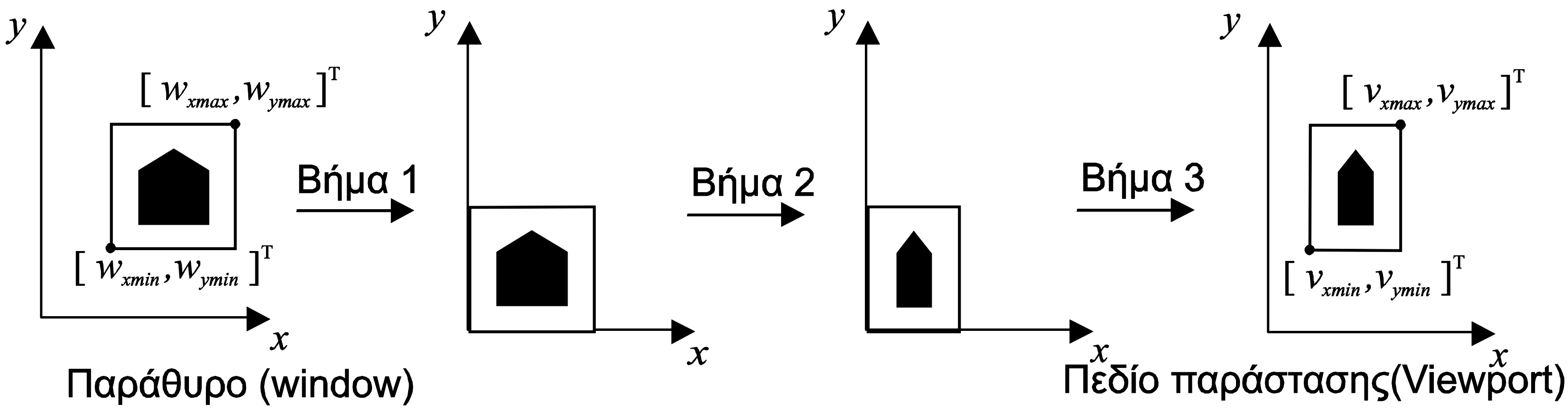
$$\mathbf{M}_{\mathbf{WV}} = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{min}}) \cdot \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{w}}_{\mathbf{min}})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_{xmin} \\ 0 & 1 & v_{ymin} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{v_{xmax} - v_{xmin}}{w_{xmax} - w_{xmin}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_{ymax} - v_{ymin}}{w_{ymax} - w_{ymin}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -w_{xmin} \\ 0 & 1 & -w_{ymin} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 8 (3)

Τελικά:

$$\mathbf{M_{WV}} = \begin{bmatrix} \dfrac{v_{xmax} - v_{xmin}}{w_{xmax} - w_{xmin}} & 0 & v_{xmin} - w_{xmin} \dfrac{v_{xmax} - v_{xmin}}{w_{xmax} - w_{xmin}} \\ 0 & \dfrac{v_{ymax} - v_{ymin}}{w_{ymax} - w_{ymin}} & v_{ymin} - w_{ymin} \dfrac{v_{ymax} - v_{ymin}}{w_{ymax} - w_{ymin}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 8 (4)

- $\mathbf{M_{WV}}$ εκφράζει μη ισότροπη αλλαγή κλίμακας ($s_x \neq s_y$) → παραμόρφωση αντικειμένων. Ο κύκλος μετατρέπεται σε έλλειψη και το τετράγωνο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
- Οι *λόγοι εικόνας* του παραθύρου και του πεδίου παράστασης ορίζονται σαν οι λόγοι των διαστάσεών τους *x*, *y*:

$$a_w = \frac{w_{xmax} - w_{xmin}}{w_{ymax} - w_{ymin}} \quad , a_v = \frac{v_{xmax} - v_{xmin}}{v_{ymax} - v_{ymin}}$$

- Αν $a_w \neq a_v$ τότε τα αντικείμενα παραμορφώνονται.
- <u>Λύση</u> → χρήση του μεγαλύτερου δυνατού πεδίου παράστασης με τον ίδιο λόγο εικόνας με αυτόν του παραθύρου:
  - <u>Πχ:</u> αλλαγή του συνόρου v_{xmax} ή v_{ymax} του πεδίου παράστασης ως εξής:

Αν ($a_v > a_w$) τότε $v_{xmax} = v_{xmin} + a_w * (v_{ymax} - v_{ymin})$

Αλλιώς αν ($a_v < a_w$) τότε $v_{ymax} = v_{ymin} + \dfrac{(v_{xmax} - v_{xmin})}{a_w}$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 9

<u>Παράδειγμα 9: Περίπτωση Μετασχηματισμού Παράστασης</u>

Προσδιορισμός του μετασχηματισμού παράστασης από το παράθυρο:

$[w_{xmin}, w_{ymin}]^T = [1,1]^T, [w_{xmax}, w_{ymax}]^T = [3,5]^T$ στο πεδίο παράστασης:

$[v_{xmin}, v_{ymin}]^T = [0,0]^T, [v_{xmax}, v_{ymax}]^T = [1,1]^T$

Αν υπάρχει παραμόρφωση, πως μπορεί να διορθωθεί;

<u>Λύση:</u>

- Άμεση εφαρμογή του $\mathbf{M_{WV}}$ [Παρ. 8]

  Για τα παραπάνω δεδομένα έχουμε: $\mathbf{M_{WV}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

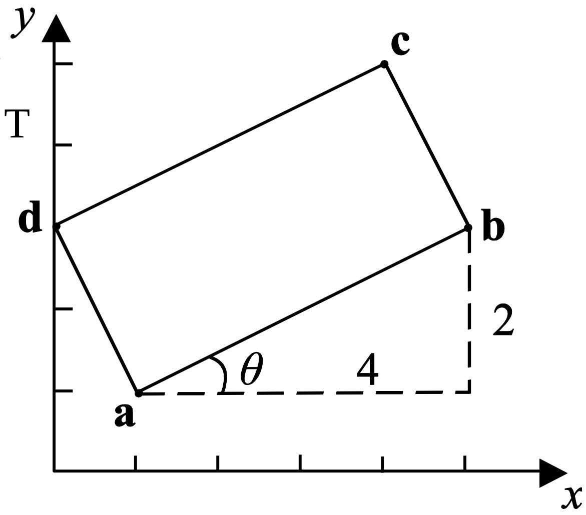
- Ισχύει $a_w = \dfrac{1}{2}$ και $a_v = \dfrac{1}{1}$ → υπάρχει παραμόρφωση καθώς $(a_v > a_w)$.

  Μπορεί να διορθωθεί μειώνοντας το μέγεθος του πεδίου παράστασης ως εξής: $v_{xmax} = v_{xmin} + a_w * (v_{ymax} - v_{ymin}) = \dfrac{1}{2}$

Μετασχηματισμοί 2Δ: Παράδειγμα 10

Παράδειγμα 10: Μετασχηματισμός Παράστασης με Κλίση

Υποθέστε ότι το παράθυρο έχει κλίση και δίνεται από τις 4 κορυφές του **a**=$[1,1]^T$, **b**=$[5,3]^T$, **c**=$[4,5]^T$ και **d**=$[0,3]^T$. Υπολογίστε το μετασχηματισμό $\mathbf{M}_{\mathbf{WV}}^{\mathbf{TILT}}$ που το απεικονίζει στο πεδίο παράστασης $[v_{xmin}, v_{ymin}]^T = [0,0]^T, [v_{xmax}, v_{ymax}]^T = [1,1]^T$



ΛΥΣΗ

- Βήμα1: Στροφή του παραθύρου κατά γωνία –θ με σταθερό το σημείο **a**. Πίνακας μετασχηματισμού **R**(-θ, **a**) [Παρ. 1] όπου

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

- Βήμα 2: Εφαρμογή του μετασχηματισμού παράστασης $\mathbf{M}_{\mathbf{WV}}$ [Παρ. 8]

Μετασχηματισμοί 2Δ: Παράδειγμα 10 (2)

Πριν το Βήμα 2 πρέπει να καθοριστούν οι μέγιστες x- και y-συντεταγμένες του περιστρεφόμενου παραθύρου, υπολογίζοντας:

$$\mathbf{c}' = \mathbf{R}(-\theta, a)\cdot\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{5} \\ 1+\sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι $[w_{xmin}, w_{ymin}]^T = \mathbf{a}, [w_{xmax}, w_{ymax}]^T = \mathbf{c}'$, και έχουμε:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{WV}}^{\mathbf{TILT}} = \mathbf{M}_{\mathbf{WV}}\cdot\mathbf{R}(-\theta, a) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 1-\frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 1-\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί 3Δ

- Ομογενείς συντεταγμένες 3Δ παρόμοιες με 2Δ
- 1 επιπλέον συντεταγμένη $[x, y, z, w]^T$ όπου w αντιστοιχεί στην επιπλέον διάσταση
- Σημεία των οποίων οι ομογενείς συντεταγμένες είναι πολλαπλάσια είναι ισοδύναμα π.χ. $[1, 2, 3, 2]^T$ και $[2, 4, 6, 4]^T$
- Βασική παράσταση
  - Μοναδική
  - Έχει $w = 1$
  - Βρίσκεται με διαίρεση με w : $[x/w, y/w, z/w, w/w]^T = [x/w, y/w, z/w, 1]^T$, $w \neq 0$

Παράδειγμα: $$[\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{2}]^T = [\frac{2}{4}, \frac{4}{4}, \frac{6}{4}, \frac{4}{4}]^T = [\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 1]^T$$

- Έχουμε 3Δ προβολή ενός 4Δ χώρου θέτοντας w=1
- Σημεία: διανύσματα 4**x**1. Μετασχηματισμοί: πίνακες 4**x**4

3Δ Ομογενής Μεταφορά

- Ορίζεται με 3Δ διάνυσμα $\vec{\mathbf{d}} = [d_x, d_y, d_z]^{\mathrm{T}}$
- Μορφή πίνακα:

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{d}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{d}})$ μπορεί να συνδυαστεί με άλλους συσχετισμένους μετασχηματισμούς με πολλαπλασιασμό πινάκων.
- Αντίστροφος μετασχηματισμός μεταφοράς: $\mathbf{T}^{-1}(\vec{\mathbf{d}}) = \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{d}})$

3Δ Ομογενής Αλλαγή Κλίμακας

- 3 παράγοντες αλλαγής κλίμακας: s_x, s_y, s_z
- Αν παράγοντας < 1 → <u>σμίκρυνση</u> αντικειμένου στην αντίστοιχη διάσταση
  παράγοντας > 1 → <u>μεγέθυνση</u> αντικειμένου
- Με μορφή πίνακα:

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Η αλλαγή κλίμακας έχει σαν παρενέργεια τη μετακίνηση του αντικειμένου, ανάλογα με τον παράγοντα αλλαγής κλίμακας

3Δ Ομογενής Αλλαγή Κλίμακας (2)

- Ισοτροπική Αλλαγή Κλίμακας:
  - Αν $s_x = s_y = s_z$
  - Διατηρεί το σχήμα των αντικειμένων (γωνίες)
- Κατοπτρισμός:
  - Σε ένα από τα κύρια επίπεδα (xy, xz, yz)
  - Χρήση του -1 σαν παράγοντα αλλαγής κλίμακας
  - Π.χ. κατοπτρισμός στο επίπεδο xy : **S**(1, 1, -1)

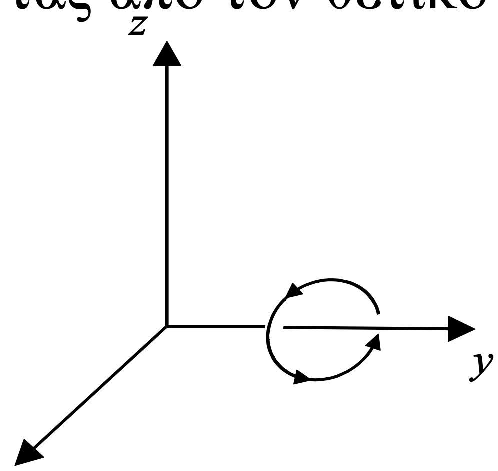
- Αντίστροφος μετασχηματισμός αλλαγής κλίμακας:

$$\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y, s_z) = \mathbf{S}(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z})$$

3Δ Ομογενής Περιστροφή

- Διαφορετική από την περιστροφή 2Δ: περιστροφή γύρω από **άξονα**
- Βασικοί μετασχηματισμοί περιστροφής: γύρω από τους 3 κύριους άξονες x, y, z
- Περιστροφή γύρω από τυχαίο άξονα: συνδυασμός βασικών περιστροφών
- Θετική περιστροφή γύρω από άξονα α:

  σε *δεξιόστροφα* συστήματα είναι η περιστροφή με κατεύθυνση αντίστροφη της φοράς των δεικτών του ρολογιού κοιτώντας από τον θετικό άξονα προς το κέντρο



Θετική Περιστροφή γύρω από τον y

3Δ Ομογενής Περιστροφή(2)

- Δεν αλλάζει η απόσταση από τον άξονα περιστροφής
- Δεν επηρεάζεται η συντεταγμένη που αντιστοιχεί στον άξονα περιστροφής
- Πίνακες περιστροφής γύρω από τους κύριους άξονες:

$$\mathbf{R_x}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R_y}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R_z}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Αντίστροφη περιστροφή :

$$\mathbf{R_x^{-1}}(\theta) = \mathbf{R_x}\ (-\theta),\ \mathbf{R_y^{-1}}(\theta) = \mathbf{R_y}(-\theta) \text{ και } \mathbf{R_z^{-1}}(\theta) = \mathbf{R_z}(-\theta)$$

- Περιστροφές γίνονται και με τη βοήθεια των quaternions

3Δ Ομογενής Στρέβλωση

- Στρέβλωση αντικειμένου σε ένα από τα κύρια επίπεδα
- Αυξάνει 2 συντεταγμένες ανάλογα με την 3η συντεταγμένη επί τον αντίστοιχο παράγοντα στρέβλωσης
- 3 είδη στρέβλωσης στις 3Δ: xy, xz, yz
- Στρέβλωση στο xy επίπεδο: αύξηση της x-συντεταγμένης κατά $a \times z$
  αύξηση της y-συντεταγμένης κατά $b \times z$

Όμοια για xz & yz :

$$\mathbf{SH_{xy}}(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{SH_{xz}}(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{SH_{yz}}(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Αντίστροφη στρέβλωση: $\mathbf{SH_{xy}^{-1}}(a,b) = \mathbf{SH_{xy}}(-a,-b),$

$$\mathbf{SH_{xz}^{-1}}(a,b) = \mathbf{SH_{xz}}(-a,-b),$$

$$\mathbf{SH_{yz}^{-1}}(a,b) = \mathbf{SH_{yz}}(-a,-b)$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 11

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11: Σύνθετη Περιστροφή - Καμπή

Υπολογίστε τον πίνακα καμπής:

Περιστροφή κατά γωνία θ_x γύρω από x-άξονα →

Περιστροφή κατά γωνία θ_y γύρω από y-άξονα

Παίζει ρόλο η σειρά που γίνονται οι περιστροφές;

ΛΥΣΗ

1. $$\mathbf{M_{BEND}} = \mathbf{R_y}(\theta_y)\cdot\mathbf{R_x}(\theta_x) = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_x\sin\theta_y & \cos\theta_x\sin\theta_y & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ -\sin\theta_y & \sin\theta_x\cos\theta_y & \cos\theta_x\cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Υπολογισμός με την αντίστροφη σειρά:

$$\mathbf{M'_{BEND}} = \mathbf{R_x}(\theta_x)\cdot\mathbf{R_y}(\theta_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ \sin\theta_x\sin\theta_y & \cos\theta_x & -\sin\theta_x\cos\theta_y & 0 \\ -\cos\theta_x\sin\theta_y & \sin\theta_x & \cos\theta_x\cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

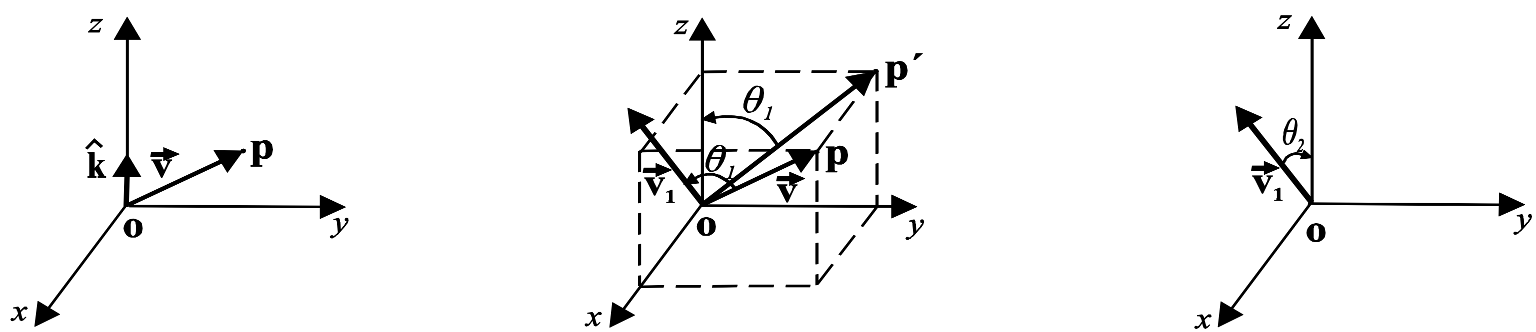
$\mathbf{M}_{BEND} \neq \mathbf{M}'_{BEND}$ οπότε η σειρά που εκτελούνται οι περιστροφές παίζει ρόλο

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 12

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12: Ευθυγράμμιση Διανύσματος με Άξονα</u>

Υπολογίστε τον μετασχηματισμό $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})$ που ευθυγραμμίζει το διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}} = [a, b, c]^T$ με το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{k}}$ κατά μήκος του θετικού άξονα z

<u>ΛΥΣΗ</u>



$\vec{\mathbf{v}}$

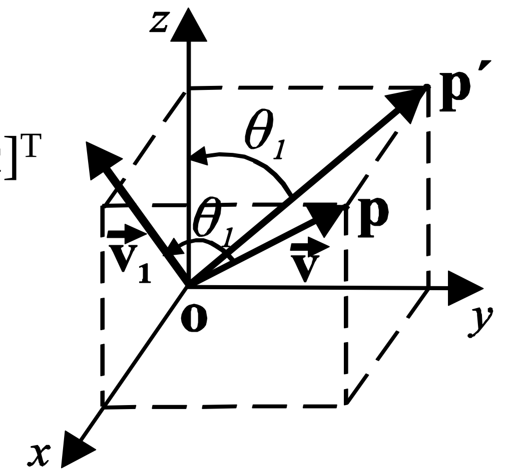
Αρχικά Βήμα 1 Βήμα 2

Χρησιμοποιούμε 2 περιστροφές:

- Βήμα 1: Στροφή γύρω από *x*-άξονα κατά θ_1 έτσι ώστε το $\vec{\mathbf{v}}$ να απεικονίζεται στο $\vec{\mathbf{v}}_1$ πάνω στο επίπεδο *xz*, $\mathbf{R_x}(\theta_1)$
- Βήμα 2: Στροφή του $\vec{\mathbf{v}}_1$ γύρω από τον *y*-άξονα κατά θ_2 έτσι ώστε να ταυτισθεί με το $\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{R_y}(\theta_2)$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 12 (2)

- Πίνακας ευθυγράμμισης $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})$: $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{R_y}(\theta_2)\cdot \mathbf{R_x}(\theta_1)$
- Υπολογισμός γωνίας θ_1:
  - θ_1 ισούται με τη γωνία που σχηματίζει η προβολή του $\vec{\mathbf{v}}$ πάνω στο επίπεδο *yz* με τον άξονα *z*
  - Η κορυφή **p** του $\vec{\mathbf{v}}$ είναι **p**=[a, b, c]^T
  - Η κορυφή της προβολής πάνω στο *yz* είναι **p**΄=[0, b, c]^T
  - Έστω ότι τα b, c δεν είναι ταυτόχρονα 0 :



$$\sin\theta_1 = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} \quad , \quad \cos\theta_1 = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

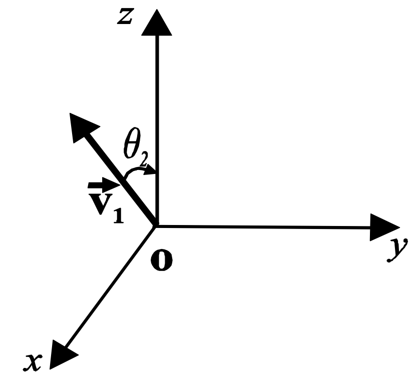
Οπότε,

$$\mathbf{R_x}(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & -\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 12 (3)

- Επιδρώντας με τον $R_x(\theta_1)$ στο $\vec{\mathbf{v}}$, προκύπτει η προβολή του $\vec{\mathbf{v}}_1$ στο *xz*

$$\overrightarrow{\mathbf{v_1}} = \mathbf{R_x}(\theta_1)\cdot\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{R_x}(\theta_1)\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ \sqrt{b^2+c^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$



- Σημείωση: $|\overrightarrow{\mathbf{v_1}}| = |\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
- Υπολογισμός θ_2:

$$\sin\theta_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad , \quad \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- Οπότε

$$\mathbf{R_y}(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 & \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 12 (4)

- Υπολογισμός του $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})$:

$$\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{R_y}(\theta_2)\cdot\mathbf{R_x}(\theta_1) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{|\vec{\mathbf{v}}|} & -\frac{ab}{\lambda|\vec{\mathbf{v}}|} & -\frac{ac}{\lambda|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & -\frac{b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|\vec{\mathbf{v}}|} & \frac{b}{|\vec{\mathbf{v}}|} & \frac{c}{|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{οπου} \quad |\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad \text{και} \quad \lambda = \sqrt{b^2+c^2}$$

- Υπολογισμού του $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})^{-1}$ (χρήσιμο για επόμενο παράδειγμα):

$$\mathbf{A}^{-1}(\vec{\mathbf{v}}) = (\mathbf{R_y}(\theta_2)\cdot\mathbf{R_x}(\theta_1))^{-1} = \mathbf{R_x}(\theta_1)^{-1}\cdot\mathbf{R_y}(\theta_2)^{-1} = \mathbf{R_x}(-\theta_1)\cdot\mathbf{R_y}(-\theta_2) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 & \frac{a}{|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 \\ -\frac{ab}{\lambda|\vec{\mathbf{v}}|} & \frac{c}{\lambda} & \frac{b}{|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 \\ -\frac{ac}{\lambda|\vec{\mathbf{v}}|} & -\frac{b}{\lambda} & \frac{c}{|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Αν b=c=0 τότε το $\vec{\mathbf{v}}$ ταυτίζεται με τον άξονα *x* → στροφή γύρω από *y* κατά 90° ή -90° σύμφωνα με το πρόσημο του α

$$\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{R_y}(-\theta_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{a}{|a|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{|a|} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 13

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13: Στροφή γύρω από τυχαίο άξονα με 2 Μεταφορές & 5 Στροφές

Βρείτε το μετασχηματισμό που εκτελεί περιστροφή κατά γωνία θ ως προς τυχαίο άξονα που ορίζεται από διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}}$ και σημείο **p.**

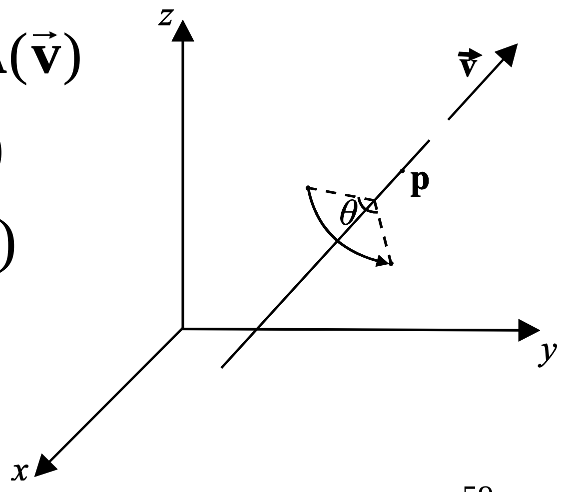
ΛΥΣΗ

Ο μετασχηματισμός $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})$ [Π.χ. 12] :

- Ευθυγραμμίζει ένα τυχαίο διάνυσμα με τον άξονα *z*
- Τον χρησιμοποιούμε για να μετασχηματίσουμε το π.χ. σε στροφή γύρω από το *z*

- Βήμα 1: Μεταφορά του **p** στην αρχή των αξόνων, $\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$
- Βήμα 2: Ευθυγράμμιση του $\vec{\mathbf{v}}$ με τον άξονα z, $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})$
- Βήμα 3: Στροφή γύρω από z κατά γωνία θ, $\mathbf{R_z}(\theta)$
- Βήμα 4: Αντιστροφή της ευθυγράμμισης, $\mathbf{A}^{-1}(\vec{\mathbf{v}})$
- Βήμα 5: Αντιστροφή της μεταφοράς, $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}})$

$$\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS}} = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\vec{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{R_z}(\theta) \cdot \mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$$



Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 14

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14:Μετασχηματισμός Συντεταγμένων με 1 μεταφορά & 3 στροφές

Βρείτε το μετασχηματισμό $\mathbf{M}_{\mathbf{ALIGN}}$ που ευθυγραμμίζει ένα 3Δ σύστημα συν/νων με διανύσματα βάσης $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ με το σύστημα συν/νων xyz με διανύσματα βάσης $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$.

Η αρχή των αξόνων του 1ου συστήματος σε σχέση με το xyz είναι $\mathbf{O}_{\mathbf{lmn}}$.

ΛΥΣΗ

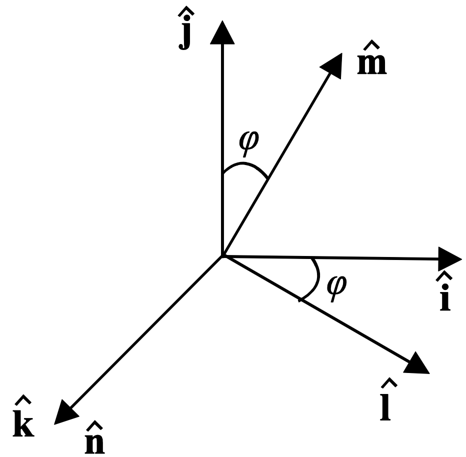
Μετασχηματισμός άξονα:

- ευθυγράμμιση της βάσης $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ με τη βάση $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ $\Longrightarrow$
- αλλαγή του συστήματος αξόνων του αντικειμένου από $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ σε $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$

Η λύση είναι επέκταση του $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})$ [Παρ. 12]

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 14 (2)

- Βήμα 1: Μεταφορά κατά **-O$_{\mathbf{lmn}}$** για ταύτιση των 2 κέντρων, $\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{O}}_{\mathbf{lmn}})$
- Βήμα 2: Ευθυγράμμιση του διανύσματος βάσης $\hat{\mathbf{n}}$ με το διάνυσμα βάσης $\hat{\mathbf{k}}$, χρησιμοποιώντας τον $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})$ του [Παρ. 12], $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}})$



- Βήμα 3: Περιστροφή κατά φ γύρω από το άξονα *z* για να ευθυγραμμιστούν οι 2 άλλοι άξονες, $\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\varphi)$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{ALIGN}} = \mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\varphi)\cdot \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}})\cdot\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{O}}_{\mathbf{lmn}})$$

Μετασχηματισμός του $\hat{\mathbf{l}}$ ή του $\hat{\mathbf{m}}$ με $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}})$ για υπολογισμό της γωνίας φ.

Π.χ. $\hat{\mathbf{m}}' = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}})\cdot\hat{\mathbf{m}}$: τα *sinφ* και *cosφ* θα είναι τα *x* και *y* του $\hat{\mathbf{m}}'$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 14(3)

ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Τα διανύσματα της ορθοκανονικής βάσης των 2 συστημάτων αξόνων :

$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} \\ \frac{4}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} -\frac{32}{\sqrt{1653}} \\ \frac{25}{\sqrt{1653}} \\ -\frac{2}{\sqrt{1653}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{57}} \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} \\ \frac{7}{\sqrt{57}} \end{bmatrix}$$

Η αρχή των αξόνων για τα 2 συστήματα ταυτίζεται ($\mathbf{O}_{\mathbf{lmn}} = [0.0.0]^T$).

Βρείτε το μετασχηματισμό $\mathbf{M}_{\mathbf{ALIGN}}$.

- Τα διανύσματα βάσης του 2ου συστήματος εκφράζονται ως προς το 1ο
- Από τις συντεταγμένες του $\hat{\mathbf{n}}$ [Παρ. 12] έχουμε:

$$a = -\frac{2}{\sqrt{57}}, b = -\frac{2}{\sqrt{57}}, c = \frac{7}{\sqrt{57}} \text{ και } \lambda = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{(-\frac{2}{\sqrt{57}})^2 + (\frac{7}{\sqrt{57}})^2}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 14 (4)

- Υπολογισμός $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}})$: $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{53}{57}} & -\frac{4}{\sqrt{3021}} & \frac{14}{\sqrt{3021}} & 0 \\ 0 & \frac{7}{\sqrt{53}} & \frac{2}{\sqrt{53}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Υπολογισμός $\hat{\mathbf{m}}'$:

$$\hat{\mathbf{m}}' = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{m}} = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{32}{\sqrt{1653}} \\ \frac{25}{\sqrt{1653}} \\ -\frac{2}{\sqrt{1653}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \color{blue}{-\frac{32}{\sqrt{1537}}} \\ \color{red}{3\sqrt{\frac{57}{1537}}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Οπότε $\color{blue}{\sin\varphi} = -\frac{32}{\sqrt{1537}}$ και $\color{red}{\cos\varphi} = 3\sqrt{\frac{57}{1537}}$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 14 (5)

- Υπολογισμός $\mathbf{R_z}(\varphi)$:

$$\mathbf{R_z}(\varphi)=\begin{bmatrix} 3\sqrt{\frac{57}{1537}} & \frac{32}{\sqrt{1537}} & 0 & 0 \\ -\frac{32}{\sqrt{1537}} & 3\sqrt{\frac{57}{1537}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Υπολογισμός $\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{O}}_{\mathbf{lmn}})$: οι αρχές των αξόνων των 2 συστημάτων συντεταγμένων ταυτίζονται $\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{O}}_{\mathbf{lmn}})=\mathbf{ID}$
- Άρα, $\mathbf{M_{ALIGN}}=\mathbf{R_z}(\varphi)\cdot\mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}})\cdot\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{O}}_{\mathbf{lmn}})$

$$\mathbf{M_{ALIGN}}=\mathbf{R_z}(\varphi)\cdot\mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}})\cdot\mathbf{ID}=\begin{bmatrix} 3\sqrt{\frac{57}{1537}} & \frac{32}{\sqrt{1537}} & 0 & 0 \\ -\frac{32}{\sqrt{1537}} & 3\sqrt{\frac{57}{1537}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{53}{57}} & -\frac{4}{\sqrt{3021}} & \frac{14}{\sqrt{3021}} & 0 \\ 0 & \frac{7}{\sqrt{53}} & \frac{2}{\sqrt{53}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} & 0 \\ -\frac{32}{\sqrt{1653}} & \frac{25}{\sqrt{1653}} & -\frac{2}{\sqrt{1653}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 15

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15: Αλλαγή Βάσης

Βρείτε το μετασχηματισμό $\mathbf{M}_{\mathbf{BASIS}}$ που χρειάζεται για την αλλαγή της ορθοκανονικής βάσης ενός συστήματος συντεταγμένων $B1 = (\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{j}}_1, \hat{\mathbf{k}}_1)$ στην $B2 = (\hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{j}}_2, \hat{\mathbf{k}}_2)$ και αντίστροφα.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι οι συντεταγμένες του ίδιου διανύσματος στις 2 βάσεις είναι $\vec{\mathbf{v}}_{B1}$ και $\vec{\mathbf{v}}_{B2}$

Αν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων βάσης $\hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{j}}_2, \hat{\mathbf{k}}_2$ στην *B1* είναι:

$$\hat{\mathbf{i}}_{2,B1} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{j}}_{2,B1} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{k}}_{2,B1} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι: $$\vec{\mathbf{v}}_{B1} = \begin{bmatrix} a & d & p \\ b & e & q \\ c & f & r \end{bmatrix} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{B2}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 15 (2)

Έτσι ,

$$\mathbf{M}_{\mathbf{BASIS}}^{-1} = \begin{bmatrix} a & d & p \\ b & e & q \\ c & f & r \end{bmatrix}$$

B2 είναι ορθοκανονική βάση $\Rightarrow \mathbf{M}_{\mathbf{BASIS}}^{-1}$ είναι ορθοκανονικός πίνακας $\Longrightarrow$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{BASIS}} = (\mathbf{M}_{\mathbf{BASIS}}^{-1})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{bmatrix}$$

Σε ομογενή μορφή:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{BASIS}} = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 16

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16: Μετασχηματισμός συντεταγμένων με την αλλαγή βάσης

Χρησιμοποιήστε την αλλαγή βάσης του παρ. 15 για να ευθυγραμμίσετε σύστημα συντεταγμένων με διανύσματα βάσης $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ με το σύστημα συντεταγμένων xyz με διανύσματα βάσης $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$

Η αρχή των αξόνων του 1ου συστήματος σε σχέση με το xyz είναι $\mathbf{O}_{\mathbf{lmn}}$.

ΛΥΣΗ

Είναι μετασχηματισμός άξονα:

- Αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων από $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ σε $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$
- Η αλλαγή βάσης αντικαθιστά τις 3 περιστροφές του παρ. 14

- Βήμα 1: Μεταφορά κατά $-\mathbf{O}_{\mathbf{lmn}}$ για να ταυτιστούν τα 2 κέντρα: $\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{O}}_{\mathbf{lmn}})$
- Βήμα 2: Χρήση του $\mathbf{M}_{\mathbf{BASIS}}$ για αλλαγή της βάσης από $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ σε $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 16 (2)

$$\mathbf{M}_{\mathbf{ALIGN2}} = \mathbf{M}_{\mathbf{BASIS}} \cdot \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{O}}_{\mathbf{lmn}}) = \begin{bmatrix} a & b & c & -(a\,o_x + b\,o_y + c\,o_z) \\ d & e & f & -(d\,o_x + e\,o_y + f\,o_z) \\ p & q & r & -(p\,o_x + q\,o_y + r\,o_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Όπου τα διανύσματα βάσης $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ εκφρασμένα στη βάση $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ είναι:

$$\hat{\mathbf{l}} = [a,b,c]^T, \hat{\mathbf{m}} = [d,e,f]^T, \hat{\mathbf{n}} = [p,q,r]^T \text{ και } \mathbf{O}_{\mathbf{lmn}} = [o_x, o_y, o_z]$$

ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ [Παρ. 14]:

Οχι μεταφορά αφού ταυτίζονται τα 2 κέντρα.

$$\mathbf{M}_{\mathbf{BASIS}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} \\ -\frac{32}{\sqrt{1653}} & \frac{25}{\sqrt{1653}} & -\frac{2}{\sqrt{1653}} \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} \end{bmatrix}$$

σε ομογενή μορφή

$$\mathbf{M}_{\mathbf{BASIS}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} & 0 \\ -\frac{32}{\sqrt{1653}} & \frac{25}{\sqrt{1653}} & -\frac{2}{\sqrt{1653}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 17

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17: Στροφή γύρω από τυχαίο άξονα με Αλλαγή Βάσης

Χρησιμοποιήστε την αλλαγή βάσης του παρ.15 για να βρείτε έναν εναλλακτικό μετασχηματισμό για περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από τυχαίο άξονα που ορίζεται με διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}}$ και σημείο **p**.

ΛΥΣΗ

- Έστω $\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ και $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$
- Το επίπεδο που είναι κάθετο στο $\vec{\mathbf{v}}$ μέσω του **p:** $a(x-x_p)+b(y-y_p)+c(z-z_p)=0$
- Έστω **q** ένα σημείου του επιπέδου αυτού: $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$ και $\vec{\mathbf{m}} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ *και* $\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{v}}$
- Κανονικοποίηση των $\vec{\mathbf{l}}, \vec{\mathbf{m}}, \vec{\mathbf{v}}$ για εύρεση βάσης $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{v}})$ με έναν άξονα τον $\vec{\mathbf{v}}$ και τους άλλους 2 άξονες πάνω στο δοθέν επίπεδο
- Χρήση του $\mathbf{M}_{\mathbf{BASIS}}$ για ευθυγράμμιση με το xyz-σύστημα
- Εκτέλεση της περιστροφής κατά θ γύρω από τον *z*

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 17 (2)

- Βήμα 1: Μεταφορά του **p** στην αρχή των αξόνων, $\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$
- Βήμα 2: Ευθυγράμμιση της βάσης $(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{m}},\hat{\mathbf{v}})$ με τη βάση $(\hat{\mathbf{i}},\hat{\mathbf{j}},\hat{\mathbf{k}})$,$\mathbf{M}_{\mathbf{BASIS}}$
- Βήμα 3: Περιστροφή ως προς *z* κατά γωνία θ, $\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\theta)$
- Βήμα 4: Αντιστροφή της ευθυγράμμισης, $\mathbf{M}^{-1}_{\mathbf{BASIS}}$
- Βήμα 5: Αντιστροφή της μεταφοράς, $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}})$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{ROT-AXIS2}} = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}})\cdot\mathbf{M}^{-1}_{\mathbf{BASIS}}\cdot\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\theta)\cdot\mathbf{M}_{\mathbf{BASIS}}\cdot\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$$

Ο αλγεβρικός υπολογισμός του $\mathbf{M}_{\mathbf{ROT-AXIS2}}$ είναι πιο απλός από τον $\mathbf{M}_{\mathbf{ROT-AXIS}}$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 18

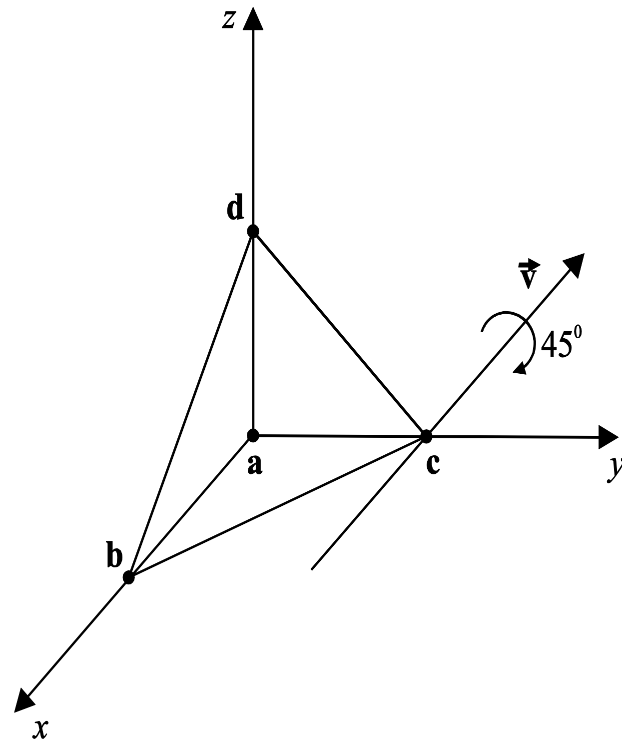
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18: Περιστροφή Πυραμίδας

Περιστρέψτε την πυραμίδα που ορίζεται από τις κορυφές $\mathbf{a}=[0,0,0]^T, \mathbf{b}=[1,0,0]^T$, $\mathbf{c}=[0,1,0]^T$ και $\mathbf{d}=[0,0,1]^T$ κατά γωνία 45° γύρω από τον άξονα που ορίζεται από το σημείο $\mathbf{c}$ και το διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}}=[0,1,1]^T$

ΛΥΣΗ

Η πυραμίδα αναπαρίσταται με τον πίνακα $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$



Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 18 (2)

- Περιστροφή της πυραμίδας με χρήση του πίνακα $\mathbf{M}_{\mathbf{ROT\text{-}AXIS}}$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{ROT\text{-}AXIS}} = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}})\cdot \mathbf{A}^{-1}(\vec{\mathbf{v}})\cdot \mathbf{R}_{\mathbf{z}}(\theta)\cdot \mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})\cdot \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$$

- Οι υποπίνακες:

$$\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{c}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}}(45^{\circ}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}(\vec{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{c}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 18 (3)

- Συνδυασμός των υποπινάκων:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{ROT-AXIS}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Υπολογισμός της νέας πυραμίδας:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{M}_{\mathbf{ROT-AXIS}} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1+\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{4-\sqrt{2}}{4} & 1 & \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}-4}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Οι κορυφές της νέας πυραμίδας είναι:

$$\mathbf{a}' = [\frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}-2}{4}]^T, \mathbf{b}' = [\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{4-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}-4}{4}]^T, \mathbf{c}' = [0,1,0]^T \text{ και } \mathbf{d}' = [1, \frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]^T$$

Quaternions

- Εναλλακτικός τρόπος για να εκφράσουμε τις περιστροφές
- Χρήσιμα για τις περιστροφές στη συνθετική κίνηση (animation)
- Ένα quaternion αποτελείται από 4 πραγματικούς : q = (s, x, y, z)
  - s → βαθμωτό κομμάτι του quaternion q
  - $\vec{\mathbf{v}} = (x, y, z)$ → διανυσματικό κομμάτι quaternion q
- Έτσι ο εναλλακτικός τρόπος αναπαράστασης είναι: $q = (s, \vec{\mathbf{v}})$
- Είναι σαν προέκταση των σύνθετων αριθμών στις 4 διαστάσεις:
  - Χρησιμοποιώντας "φανταστικές μονάδες" i, j και k: $i^2=j^2=k^2=-1$ & ij=k, ji=-k κτλ μέσω κυκλικής μετάθεσης, το quaternion q γράφεται: q = s+ xi+ yj+ zk
- Ένας πραγματικός u εκφράζεται σαν quaternion: $q = (u, \vec{\mathbf{0}})$
- Ένα διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}}$ εκφράζεται σαν quaternion: $q = (0, \vec{\mathbf{v}})$
- Ένα σημείο **p** γράφεται σαν quaternion: q = (0, **p**)

Quaternions (2)

- Πρόσθεση των quaternions:

$$q_1 + q_2 = (s_1, \vec{v}_1) + (s_2, \vec{v}_2) = (s_1 + s_2,\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

- Πολλαπλασιασμός των quaternions:

$$q_1 \cdot q_2 = (s_1 s_2 - \vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2, s_1 \vec{\mathbf{v}}_2 + s_2 \vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2) =$$

$$(s_1 s_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2, s_1 x_2 + x_1 s_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2,$$

$$s_1 y_2 + y_1 s_2 + z_1 x_2 - x_1 z_2, s_1 z_2 + z_1 s_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

- Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστική πράξη
- Ο πολλαπλασιασμός **<u>δεν</u>** είναι αντιμεταθετική πράξη
- Το *συζυγές quaternion* του q ορίζεται ως: $\bar{q} = (s, -\vec{\mathbf{v}})$
- Ισχύει ότι: $\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$
- Το μέτρο του q ορίζεται ως:

$$|q|^2 = q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = s^2 + |\vec{\mathbf{v}}|^2 = s^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

Quaternions (3)

- Ισχύει ότι: $\left|q_1 \cdot q_2\right| = \left|q_1\right| \cdot \left|q_2\right|$

- *Μοναδιαίο quaternion* ονομάζεται εκείνο για το οποίο ισχύει: $\left|q\right| = 1$

- Το *αντίστροφο quaternion* του q ορίζεται ως: $q^{-1} = \frac{1}{\left|q\right|^2}\bar{q}$

- Ισχύει ότι: $q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1$

- Αν $\left|q\right| = 1$ τότε $q^{-1} = \bar{q}$

Περιστροφή με τη χρήση quaternions

- Έστω περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από άξονα που περνάει από την αρχή των αξόνων και η κατεύθυνσή του δίνεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$. Η περιστροφή εκφράζεται από το μοναδιαίο quaternion:

$$q = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\hat{\mathbf{n}})$$

- Το μοναδιαίο quaternion εφαρμόζεται σε ένα σημείο **p** που έχει γραφεί σαν quaternion **p** = (0, **p**) : $p' = q \cdot \mathbf{p} \cdot q^{-1} = q \cdot \mathbf{p} \cdot \overline{q}$
- Έτσι: $p' = \left(0, (s^2 - \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}})\mathbf{p} + 2\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{p}) + 2s(\vec{\mathbf{v}} \times \mathbf{p})\right)$.

όπου

$$s = \cos\frac{\theta}{2} \quad \text{and} \quad \vec{\mathbf{v}} = \sin\frac{\theta}{2}\hat{\mathbf{n}}$$

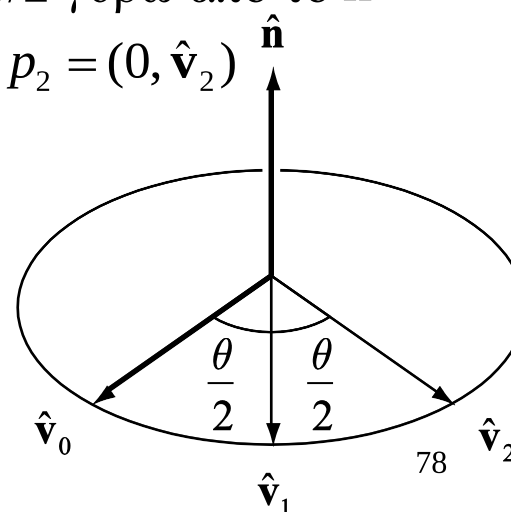
- Το quaternion p’ είναι το σημείο **p’** αφού το βαθμωτό μέρος είναι 0
- Το **p’** είναι ακριβώς η προβολή του αρχικού σημείου **p** μετά από την περιστροφή του κατά θ γύρω από τον άξονα

Περιστροφή με τη χρήση quaternions (2)

- 2 διαδοχικές περιστροφές:

$$q_2\cdot(q_1\cdot\mathbf{p}\cdot\overline{q_1})\cdot\overline{q_2} = (q_2\cdot q_1)\cdot\mathbf{p}\cdot(\overline{q_1}\cdot\overline{q_2}) = (q_2\cdot q_1)\cdot\mathbf{p}\cdot\overline{(q_2\cdot q_1)}$$

- Η σύνθετη περιστροφή δίνεται με το μοναδιαίο quaternion: $q = q_2 q_1$
- Ο πολλαπλασιασμός quaternions είναι απλός, έχει λιγότερες πράξεις και είναι αριθμητικά πιο συνεπής από την περιστροφή με πολλαπλασιασμό πινάκων.
- Απόδειξη για την περιστροφή quaternions:
  - Έστω το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{v}}_0$, ο άξονας περιστροφής $\hat{\mathbf{n}}$ και οι προβολές $\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2$ του $\hat{\mathbf{v}}_0$ μετά από 2 διαδοχικές περιστροφές κατά γωνία θ/2 γύρω από το $\hat{\mathbf{n}}$
  - Τα αντίστοιχα quaternions είναι: $p_0 = (0, \hat{\mathbf{v}}_0),\ p_1 = (0, \hat{\mathbf{v}}_1),\ p_2 = (0, \hat{\mathbf{v}}_2)$
  - Παρατηρούμε ότι: $\cos\frac{\theta}{2} = \hat{\mathbf{v}}_0 \cdot \hat{\mathbf{v}}_1$ και $\sin\frac{\theta}{2}\ \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{v}}_0 \times \hat{\mathbf{v}}_1$
  - Άρα : $q = (\hat{\mathbf{v}}_0 \cdot \hat{\mathbf{v}}_1,\ \hat{\mathbf{v}}_0 \times \hat{\mathbf{v}}_1) = p_1 \cdot \overline{p_0}$
  - Όμοια: $q = p_2 \cdot \overline{p_1}$



Περιστροφή με τη χρήση quaternions (3)

- Ισχύει: $q \cdot p_0 \cdot \overline{q} = (p_1 \cdot \overline{p_0}) \cdot p_0 \cdot \overline{(p_2 \cdot \overline{p_1})} = (p_1 \cdot \overline{p_0}) \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot \overline{p_2} = p_1 \cdot p_1 \cdot \overline{p_2} = p_2$
  αφού $p_1 \cdot p_1 = (-1, \vec{0}) = -1$ επειδή $|\mathbf{v}_1| = 1$ και $(-1) \cdot \overline{p_2} = -(0, -\hat{\mathbf{v}}_2) = (0, \hat{\mathbf{v}}_2) = p_2$

- Άρα με $q \cdot p_0 \cdot \overline{q}$ προκύπτει η περιστροφή του $\hat{\mathbf{v}}_0$ κατά γωνία θ γύρω από το $\hat{\mathbf{n}}$

- Όμοια η πράξη, $q \cdot p_1 \cdot \overline{q}$ περιστρέφει το $\hat{\mathbf{v}}_1$, επειδή $q \cdot (0, \hat{\mathbf{n}}) \cdot \overline{q}$ είναι ίσο με $\hat{\mathbf{n}}$, το οποίο συμφωνεί με το ότι ο $\hat{\mathbf{n}}$ είναι άξονας περιστροφής.

Περιστροφή με τη χρήση quaternions (4)

- Γενικεύοντας για τυχαίο διάνυσμα:

  $\hat{\mathbf{v}}_0, \hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{n}}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα το διάνυσμα $\vec{\mathbf{p}}$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός: $\vec{p} = \lambda_0 \hat{\mathbf{v}}_0 + \lambda_1 \hat{\mathbf{v}}_1 + \lambda \hat{\mathbf{n}}$

- Έτσι:

$$
\begin{aligned}
q \cdot (0, \vec{\mathbf{p}}) \cdot \bar{q} &= q \cdot (0, \lambda_0 \hat{\mathbf{v}}_0 + \lambda_1 \hat{\mathbf{v}}_1 + \lambda \hat{\mathbf{n}}) \cdot \bar{q} \\
&= q \cdot (0, \lambda_0 \hat{\mathbf{v}}_0) \cdot \bar{q} + q \cdot (0, \lambda_1 \hat{\mathbf{v}}_1) \cdot \bar{q} + q \cdot (0, \lambda \hat{\mathbf{n}}) \cdot \bar{q} \\
&= \lambda_0 (q \cdot (0, \hat{\mathbf{v}}_0) \cdot \bar{q}) + \lambda_1 (q \cdot (0, \hat{\mathbf{v}}_1) \cdot \bar{q}) + \lambda (q \cdot (0, \hat{\mathbf{n}}) \cdot \bar{q})
\end{aligned}
$$

που είναι ένα quaternion με βαθμωτό μέρος 0 και διανυσματικό μέρος από συνιστώσες του $\vec{\mathbf{p}}$ που έχουν περιστραφεί.

Μετατροπή Quaternions -- Πίνακες Περιστροφής

- Ο πίνακας περιστροφής που αντιστοιχεί σε μια περιστροφή που ορίζεται με το μοναδιαίο quaternion q = (s, x, y, z) είναι :

$$\mathbf{R}_q = \begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy-2sz & 2xz+2sy & 0 \\ 2xy+2sz & 1-2x^2-2z^2 & 2yz-2sx & 0 \\ 2xz-2sy & 2yz+2sx & 1-2x^2-2y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Αν ο παρακάτω πίνακας

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & 0 \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

παριστάνει μια περιστροφή τότε το αντίστοιχο quaternion q = (s, x, y, z) υπολογίζεται ως εξής:

Μετατροπή Quaternions -- Πίνακες Περιστροφής (2)

- Βήμα 1:

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{m_{00} + m_{11} + m_{22} + 1}$$

- Βήμα 2:

$$x = \frac{m_{21} - m_{12}}{4s}, \quad y = \frac{m_{02} - m_{20}}{4s}, \quad z = \frac{m_{10} - m_{01}}{4s}$$

- Αν s = 0 (ή κοντά στο 0), χρησιμοποιούνται διαφορετικές σχέσεις:

τότε $$x = \frac{1}{2}\sqrt{m_{00} - m_{11} - m_{22} + 1}, \quad y = \frac{m_{01} + m_{10}}{4x},$$

$$z = \frac{m_{02} + m_{20}}{4x}, \quad s = \frac{m_{21} - m_{12}}{4x}$$

Παράδειγμα

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19: Περιστροφή μιας πυραμίδας</u>

Επανεξέταση παραδείγματος 18, χρησιμοποιώντας quaternions.

<u>ΛΥΣΗ</u>

- Βήμα 1: Μεταφορά κατά $-\vec{\mathbf{c}}, \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{c}})$ ώστε ο άξονας να περνάει από το κέντρο συντεταγμένων
- Βήμα 2: Περιστροφή με τη χρήση του $\mathbf{R}_q$. Το quaternion που εκφράζει την περιστροφή κατά 45^o γύρω από έναν άξονα με κατεύθυνση $\hat{\mathbf{v}}$ είναι:

$$q = \left(\cos\frac{45^\circ}{2}, \sin\frac{45^\circ}{2}\hat{\mathbf{v}}\right) = (\cos 22.5^\circ, 0, \frac{\sin 22.5^\circ}{\sqrt{2}}, \frac{\sin 22.5^\circ}{\sqrt{2}})$$

όπου

$$\cos^2 22.5^\circ = \frac{1+\cos 45^\circ}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \sin^2 22.5^\circ = \frac{1-\cos 45^\circ}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Ένα Παράδειγμα (2)

Οπότε:

$$\mathbf{R}_q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Βήμα 3: Μεταφορά κατά $\vec{\mathbf{c}}, \mathbf{T}(\vec{\mathbf{c}})$

  Ο τελικός μετασχηματισμός είναι:

$$\mathbf{M}_{ROT-AXIS\,3} = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{c}}) \cdot \mathbf{R}_q \cdot \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{c}}) = \mathbf{M}_{ROT-AXIS} \quad [\Pi\chi.\ 18]$$

Γεωμετρικές Ιδιότητες

- Οι συσχετισμένοι μετασχηματισμοί διατηρούν σημαντικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά των αντικειμένων. Γι' αυτό χρησιμοποιούνται στα Γραφικά και στην Οπτικοποίηση
- Π.χ. έστω Φ ένας συσχετισμένος μετασχηματισμός και **p**, **q** σημεία, τότε: $\Phi(\lambda\mathbf{p}+(1-\lambda)\mathbf{q})=\lambda\Phi(\mathbf{p})+(1-\lambda)\Phi(\mathbf{q})\ ,\ \lambda\in[0,1]$
  - που δείχνει ότι ο συσχετισμένος μετασχηματισμός ενός ευθύγραμμου τμήματος με το Φ είναι επίσης ευθύγραμμο τμήμα
  - Αναλογίες και αποστάσεις του τμήματος (λ / (1-λ)) διατηρούνται
- Κατηγορίες συσχετισμένων μετασχηματισμών:
  - *Γραμμικοί*
  - *Ομοιότητας*
  - *Στερεοί*

Διατηρούμενη Ιδιότητα	Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί	Γραμμικοί Μετασχηματισμοί	Μετασχηματισμοί Ομοιότητας	Στερεοί Μετασχηματισμοί
Γωνίες	ΟΧΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
Αποστάσεις	ΟΧΙ	ΟΧΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ
Λόγοι αποστάσεων	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
Παράλληλες γραμμές	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
Συσχετισμένοι συνδυασμοί	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
Ευθείες γραμμές	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ
Λόγοι αναλογιών	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ	ΝΑΙ

Γεωμετρικές Ιδιότητες (2)

- Οι γραμμικοί μπορούν να παρασταθούν με έναν πίνακα **A**
  - Γραμμικοί: όλοι οι ομογενείς συσχετισμένοι μετασχηματισμοί
- Οι μετασχηματισμοί ομοιότητας διατηρούν την ομοιότητα των αντικειμένων. Σαν αποτέλεσμα έχουν ένα αντικείμενο όμοιο με το αρχικό, με διαφορετικό ίσως μέγεθος
  - Ομοιότητας: περιστροφή, μεταφορά, ισοτροπική αλλαγή κλίμακας
- Οι στερεοί διατηρούν όλες τις γεωμετρικές ιδιότητες των αντικειμένων
  - Στερεοί: περιστροφή και μεταφορά