Ενότητα 6: Αρμονικός ταλαντωτής – Επίλυσις δια παραγοντοποιήσεως

Άσκηση 8.1

Θεωρήστε ένα σωματίδιο το δυναμικό του οποίου περιγράφεται από το μοντέλο του αρμονικού ταλαντωτή μιας διαστάσεως. Υποθέστε ότι για $t=0$ το διάνυσμα καταστάσεως δίνεται από

$$\exp\left(\frac{-i\hat{p}a}{\hbar}\right)|0\rangle,$$

όπου $\hat{p}$ ο τελεστής της ορμής και a κάποιος αριθμός με διαστάσεις μήκους. Χρησιμοποιώντας την εικόνα Heisenberg, υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή $\langle\hat{x}\rangle$ για $t \geq 0$.

Άσκηση 8.2

i. **Γράψτε την κυματοσυνάρτηση (στην αναπαράσταση θέσεως), για την κατάσταση που περιγράφεται στην άσκηση 8.1, τη χρονική στιγμή $t=0$. Μπορείτε να λάβετε υπόψη ότι**

$$\langle x'|0\rangle = \pi^{-1/4} x_0^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{x_0}\right)^2\right], \quad \left(x_0 \equiv \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}\right).$$

ii. **Βρείτε μια απλή έκφραση για την πιθανότητα ευρέσεως της καταστάσεως στην θεμελιώδη κατάσταση όταν $t=0$. Αλλάζει η πιθανότητα αυτή για $t>0$;**

Άσκηση 8.3

Θεωρήστε έναν αρμονικό ταλαντωτή μιας διαστάσεως.

i. **Χρησιμοποιώντας τα ακόλουθα**

$$\left.\begin{matrix}\hat{a}\\ \hat{a}^\dagger\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} \pm \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right) \quad \text{και} \quad \left.\begin{matrix}\hat{a}|n\rangle\\ \hat{a}^\dagger|n\rangle\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\sqrt{n}|n-1\rangle\\ \sqrt{n+1}|n+1\rangle\end{matrix}\right.,$$

υπολογίστε $\langle m|\hat{x}|n\rangle$, $\langle m|\hat{p}|n\rangle$, $\langle m|\{\hat{x},\hat{p}\}|n\rangle$, $\langle m|\hat{x}^2|n\rangle$ και $\langle m|\hat{p}^2|n\rangle$.

ii. **Ελέγξτε αν το θεώρημα virial ισχύει για την αναμενόμενη τιμή της κινητικής ενέργειας και το δυναμικό ενέργειας που λαμβάνεται ως προς ιδιοκατάσταση της ενέργειας.**

Άσκηση 8.4

Θεωρήστε έναν αρμονικό ταλαντωτή μιας διαστάσεως. Κάντε τα παρακάτω αλγεβρικά – δηλαδή, χωρίς να εμπλέξετε κυματοσυναρτήσεις στις πράξεις σας.

i. **Βρείτε τον γραμμικό συνδυασμό των kets $|0\rangle$ και $|1\rangle$ για τον οποίο η αναμενόμενη τιμή $\langle \hat{x} \rangle$ είναι όσο το δυνατόν μέγιστη.**

ii. **Υποθέστε ότι ο ταλαντωτής βρίσκεται στην κατάσταση του ερωτήματος (i) για $t=0$. Ποιο είναι το ket καταστάσεως για $t>0$ στην εικόνα Schrödinger; Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή $\langle \hat{x} \rangle$ σαν συνάρτηση του χρόνου για $t>0$, χρησιμοποιώντας (α) την εικόνα Schrödinger και (β) την εικόνα Heisenberg.**

iii. **Υπολογίστε την $\left\langle (\Delta\hat{x})^2 \right\rangle$ σαν συνάρτηση του χρόνου και στις δυο εικόνες.**

Άσκηση 8.5

Δείξτε ότι για έναν αρμονικό ταλαντωτή μιας διαστάσεως ισχύει

$$\langle 0|\exp(ik\hat{x})|0\rangle = \exp\left[-k^2\langle 0|\hat{x}^2|0\rangle/2\right],$$

όπου $\hat{x}$ ο τελεστής θέσεως.

Άσκηση 8.6

Ως συνεκτική κατάσταση (coherent state) ενός αρμονικού ταλαντωτή μιας διαστάσεως ορίζεται η ιδιοκατάσταση του (μη – Ερμιτειανού) τελεστή καταστροφής a :

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

όπου λ, εν γένει, ένας μιγαδικός αριθμός.

i. **Αποδείξτε ότι η $|\lambda\rangle = \exp\left(\dfrac{-|\lambda|^2}{2}\right)\exp\left(\lambda a^\dagger\right)|0\rangle$ είναι μια κανονικοποιημένη συνεκτική κατάσταση.**

ii. **Αποδείξτε τη σχέση ελάχιστης αβεβαιότητας για μια τέτοια κατάσταση.**

iii. **Γράψτε την $|\lambda\rangle$ ως γραμμικό συνδυασμό**

$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)|n\rangle .$$

Δείξτε ότι η κατανομή των $|f(n)|^2$ ως προς το n είναι του τύπου Poisson. Βρείτε την πιο πιθανή τιμή του n, και κατά συνέπεια της E.

iv. **Δείξτε ότι μια συνεκτική κατάσταση μπορεί επίσης να ληφθεί από εφαρμογή του τελεστή μετατοπίσεως (για πεπερασμένη χωρική μεταφορά) $\exp(i\hat{p}l/\hbar)$ (όπου $\hat{p}$ είναι ο τελεστής της ορμής και l η χωρική μετατόπιση) στη θεμελιώδη κατάσταση.**