Ενότητα 4: Αναπαραστάσεις

Άσκηση 4.1

i. Έστω x και p_x η θέση και η γραμμική ορμή σε μια διάσταση. Υπολογίστε την κλασσική αγκύλη Poisson $\left[x, F(p_x)\right]_{classical}$.

ii. Έστω $\hat{x}$ και $\hat{p}_x$ οι αντίστοιχοι κβάντο-μηχανικοί τελεστές. Υπολογίστε τον μεταθέτη $\left[\hat{x}, \exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)\right]$.

iii. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος, αποδείξτε ότι το $\exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)|x'\rangle$ όπου $\hat{x}|x'\rangle = x'|x'\rangle$ είναι μια ιδιοκατάσταση του τελεστή θέσης $\hat{x}$. Ποια είναι η αντίστοιχη ιδιοτιμή;

Λύση:

i. Η αγκύλη Poisson (Poisson bracket) δυο ποσοτήτων $A(q,p)$ και $B(p,q)$ στην κλασσική μηχανική ($\{A,B\}$) ορίζεται από την σχέση

$$\{A,B\}_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \right)$$

όπου (q_i, p_i) οι "canonical" μεταβλητές των συναρτήσεων A και B.

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε να υπολογίσουμε την αγκύλη Poisson των ποσοτήτων x και $F(p_x)$ ($i=1$), όπου x είναι η «θέση» και p_x η γραμμική ορμή.

$$\{x, F(p_x)\} = \frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial F(p_x)}{\partial p_x} - \frac{\partial x}{\partial p_x}\frac{\partial F(p_x)}{\partial x} = 1\cdot\frac{\partial F(p_x)}{\partial p_x} - 0\cdot 0 = \frac{\partial F(p_x)}{\partial p_x}$$

ii. $\hat{x}$, $\hat{p}_x$ τελεστές. Υπολογίζουμε τον μεταθέτη $\left[\hat{x}, \exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)\right]$.

$$\left[\hat{x}, \exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)\right] = \left[\hat{x}, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ia)^n}{\hbar^n}\frac{\hat{p}_x{}^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ia)^n}{\hbar^n}\frac{1}{n!}\left[\hat{x}, \hat{p}_x{}^n\right]$$

Η τελευταία προκύπτει απευθείας εκ των ιδιοτήτων του μεταθέτη. Άρα,

$$\left[\hat{x},\exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)\right]=\left[\hat{x},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ia)^n}{\hbar^n}\frac{\hat{p}_x{}^n}{n!}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ia)^n}{\hbar^n}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}\hat{p}_x{}^k\left[\hat{x},\hat{p}_x\right]\hat{p}_x{}^{n-k-1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ia)^n}{\hbar^n}\frac{1}{n!}(i\hbar)\sum_{k=0}^{n-1}\hat{p}_x{}^k\,\hat{p}_x{}^{n-k-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{(ia)^{n-1}}{\hbar^{n-1}}(-a)(n)\hat{p}_x{}^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}\frac{(ia)^{n-1}}{\hbar^{n-1}}(-a)\hat{p}_x{}^{n-1}$$

Ο τελευταίος παράγων $(n)\hat{p}_x{}^{n-1}$ προκύπτει διότι η ποσότης $\hat{p}_x{}^{n-1}$ αθροίζεται n φορές!

Επομένως,

$$\left[\hat{x},\exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)\right]=-a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\frac{(ia)^{n-1}}{\hbar^{n-1}}\hat{p}_x{}^{n-1}=-a\exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)$$

Η (ii) αποδεικνύεται αμέσως εάν χρησιμοποιήσουμε την γενικότερη σχέση $\left[\hat{x},F(\hat{p}_x)\right]=i\hbar\dfrac{\partial F}{\partial\hat{p}_x}$

Άρα,

$$\left[\hat{x},\exp\left(\frac{ia\hat{p}_x}{\hbar}\right)\right]=ih\frac{ia}{\hbar}\exp\left(\frac{ia\hat{p}_x}{\hbar}\right)=-a\exp\left(\frac{ia\hat{p}_x}{\hbar}\right)$$

Ή ακόμη και την $\left[\hat{x},\hat{p}_x{}^n\right]=n(i\hbar)\hat{p}_x{}^{n-1}$ ως μερική περίπτωση της προηγούμενης. Άρα,

$$\left[\hat{x},\exp\left(\frac{ia\hat{p}_x}{\hbar}\right)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{(ia)^n}{\hbar^n}\left[\hat{x},\hat{p}_x{}^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{(ia)^n}{\hbar^n}(n)(i\hbar)\hat{p}_x{}^{n-1}=-a\exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)$$

Αποφεύγοντας την κοπιαστική, και καμιά φορά «επικίνδυνη» άλγεβρα των δεικτών.

Η $\left[\hat{x},\hat{p}_x{}^n\right]=n(i\hbar)\hat{p}_x{}^{n-1}$ αποδεικνύεται και επαγωγικώς.

iii. Από την (ii) έχουμε

$$\hat{x}\exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)-\exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)\hat{x}=-a\exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)$$

Ή

$$\hat{x}\exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)\left|x'\right\rangle=\exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)\hat{x}\left|x'\right\rangle-a\exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)\left|x'\right\rangle=\exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)x'\left|x'\right\rangle-a\exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)\left|x'\right\rangle$$

Δηλαδή,

$$\hat{x}\exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)\left|x'\right\rangle = \exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)(x'-a)\left|x'\right\rangle$$

Χρησιμοποιήσαμε βεβαίως την σχέση $\hat{x}\left|x'\right\rangle = x'\left|x'\right\rangle$. Η σχέση στην οποία καταλήξαμε σημαίνει ότι η $\exp\left(\frac{i\hat{p}_x a}{\hbar}\right)\left|x'\right\rangle$ είναι ιδιοκατάσταση του τελεστού $\hat{x}$ ιδιοτιμής $(x'-a)$. Αναμενόμενον!

<u>Άσκηση 4.2</u>

i. **Αποδείξτε τα ακόλουθα:**
   - $\left\langle p'\right|\hat{x}\left|\alpha\right\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\left\langle p'|\alpha\right\rangle$
   - $\left\langle\beta\right|\hat{x}\left|\alpha\right\rangle = \int dp'\phi_\beta^*(p')i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\phi_\alpha(p')$, **όπου** $\phi_\alpha(p') = \left\langle p'|\alpha\right\rangle$ **και** $\phi_\beta(p') = \left\langle p'|\beta\right\rangle$ **είναι κυματοσυναρτήσεις στην αναπαράσταση της ορμής.**

ii. **Ποια είναι η φυσική σημασία του** $\exp\left(\frac{i\hat{x}\Xi}{\hbar}\right)$**, όπου** $\hat{x}$ **είναι ο τελεστής θέσεως και** Ξ **κάποιος αριθμός με διαστάσεις ορμής; Αιτιολογήστε την απάντηση σας.**