Ενότητα 2: Διανυσματικοί χώροι bra-ket

Άσκηση 2.1

Χρησιμοποιώντας την άλγεβρα των bra-ket, αποδείξτε ή αξιολογήστε τα παρακάτω:

i. $\mathrm{tr}\left(\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}}\right)^{\dagger} = \mathrm{tr}\left(\hat{\mathbf{Y}}\hat{\mathbf{X}}\right)$, **όπου** $\hat{\mathbf{X}}$ **και** $\hat{\mathbf{Y}}$ **είναι τελεστές.**

ii. $\left(\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{Y}}\right)^{\dagger} = \hat{\mathbf{Y}}^{\dagger}\hat{\mathbf{X}}^{\dagger}$, **όπου** $\hat{\mathbf{X}}$ **και** $\hat{\mathbf{Y}}$ **είναι τελεστές.**

iii. $\exp\left[if\left(\hat{\mathbf{A}}\right)\right] = ?$ **σε μορφή ket-bra, όπου** $\hat{\mathbf{A}}$ **είναι ένας Ερμιτειανός τελεστής με γνωστές ιδιοτιμές.**

iv. $\sum_{a'} \psi^{*}_{a'}\left(\mathbf{x}'\right)\psi_{a'}\left(\mathbf{x}''\right) = ?$, **όπου** $\psi_{a'}\left(\mathbf{x}'\right) = \left\langle \mathbf{x}' \middle| a' \right\rangle$.

Άσκηση 2.2

i. **Θεωρήστε δυο ket** $|\alpha\rangle$ **και** $|\beta\rangle$. **Υποθέστε ότι τα** $\langle a'|\alpha\rangle$, $\langle a''|\alpha\rangle$,... **και** $\langle a'|\beta\rangle$, $\langle a''|\beta\rangle$,... **είναι όλα γνωστά, όπου τα kets** $|a'\rangle$, $|a''\rangle$,... **σχηματίζουν ένα πλήρες σύνολο βάσεως. Βρείτε την αναπαράσταση μήτρας του τελεστή** $|\alpha\rangle\langle\beta|$ **σε αυτό το σύνολο βάσεως.**

ii. **Τώρα θεωρήστε ένα σύστημα με spin** $1/2$ **και έστω ότι τα kets** $|\alpha\rangle$ **και** $|\beta\rangle$ **είναι τα** $\left|s_z = \hbar/2\right\rangle$ **και** $\left|s_x = \hbar/2\right\rangle$, **αντίστοιχα. Γράψτε ρητά την τετραγωνική μήτρα που αντιστοιχεί στον τελεστή** $|\alpha\rangle\langle\beta|$ **ως προς το σύνηθες σύνολο βάσεως (το διαγώνιο ως προς** $\hat{S}_z$ **).**

Άσκηση 2.3

Υποθέστε ότι τα $|i\rangle$ **και** $|j\rangle$ **είναι ιδιοδιανύσματα ενός Ερμιτειανού τελεστή** $\hat{\mathbf{A}}$. **Υπό ποια συνθήκη το** $|i\rangle + |j\rangle$ **είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του τελεστή** $\hat{\mathbf{A}}$; **Αιτιολογήστε την απάντηση σας.**

Άσκηση 2.4

Θεωρήστε ένα χώρο ket που καλύπτεται από τα ιδιοδιανύσματα $\{|a'\rangle\}$ ενός Ερμιτειανού τελεστή $\hat{A}$. Δεν υπάρχει κανένας εκφυλισμός.

i. **Αποδείξτε ότι ο $\prod_{a'}\left(\hat{A}-a'\right)$ είναι ένας μηδενικός τελεστής.**

ii. **Ποια είναι η σημασία του $\prod_{a''\neq a'}\frac{\left(\hat{A}-a''\right)}{a'-a''}$;**

iii. **Απεικονίστε τα (i) και (ii) θέτοντας τον τελεστή $\hat{A}$ ίσο με τον $\hat{S}_z$ ενός spin-1/2 συστήματος.**

Λύση:

i. Εάν θεωρήσουμε μια αυθαίρετη κατάσταση $|\alpha\rangle$ τότε $|\alpha\rangle=\sum_{a''}|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle|a''\rangle$. Άρα

$$\prod_{a'}\left(\hat{A}-a'\right)|\alpha\rangle=\prod_{a'}\left(\hat{A}-a'\right)\sum_{a''}|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle=\sum_{a''}\prod_{a'}\left(a''-a'\right)|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle=0$$

Το γινόμενο $\prod_{a'}\left(a''-a'\right)$ μηδενίζεται διότι κάποια από τις τιμές $\{a'\}$ θα συμπέσει με την a'' (οιαδήποτε και αν είναι αυτή).

ii. Επαναλαμβάνουμε, πρακτικώς, την (i):

$$\prod_{a''(\neq a')}\frac{\left(\hat{A}-a''\right)}{\left(a'-a''\right)}|\alpha\rangle=\prod_{a''(\neq a')}\frac{\left(\hat{A}-a''\right)}{\left(a'-a''\right)}\sum_{a'''}|a'''\rangle\langle a'''|\alpha\rangle=\sum_{a'''}\prod_{a''(\neq a')}\frac{\left(\hat{A}-a''\right)}{\left(a'-a''\right)}|a'''\rangle\langle a'''|\alpha\rangle=$$

$$=\sum_{a'''}\prod_{a''(\neq a')}\frac{\left(a'''-a''\right)}{\left(a'-a''\right)}|a'''\rangle\langle a'''|\alpha\rangle=\sum_{a'''}\langle a'''|\alpha\rangle\prod_{a''(\neq a')}\frac{\left(a'''-a''\right)}{a'-a''}|a'''\rangle$$

Θυμηθείτε: το a''' είναι μια τυχαία τιμή εκ των $\{a'\}$, άρα συμπεριλαμβάνει και το a'. Στην περίπτωση αυτή $\prod_{a'(\neq a'')}\frac{\left(a'-a''\right)}{a'-a''}=1$. Σε οιαδήποτε άλλη περίπτωση $\left(a'''\neq a'\right)$ το γινόμενο είναι μηδέν. Άρα δικαιούμεθα να γράψουμε $\prod_{a'(\neq a'')}\frac{\left(a'''-a''\right)}{a'-a''}=\delta_{a'''a'}$.

Επομένως,

$$\prod_{a''(\neq a')}\frac{\left(\hat{A}-a''\right)}{\left(a'-a''\right)}|\alpha\rangle=\sum_{a'''}\langle a'''|\alpha\rangle\delta_{a'''a'}|a'''\rangle=\langle a'|\alpha\rangle|a'\rangle=|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

Ή

$$\prod_{a''(\neq a')} \frac{\left(\hat{\mathrm{A}} - a''\right)}{\left(a' - a''\right)} \left|\alpha\right\rangle = \left|a'\right\rangle\left\langle a'\middle|\alpha\right\rangle$$

Ουσιαστικώς, ο τελεστής $\prod_{a''(\neq a')} \frac{\left(\hat{\mathrm{A}} - a''\right)}{a' - a''}$ είναι ισοδύναμος του προβολικού τελεστή $\left|a'\right\rangle\left\langle a'\right|$.

iii. Απλή εφαρμογή στην περίπτωση όπου $\hat{\mathrm{A}} = \hat{S}_z$. Υπενθυμίζουμε ότι το «πλήρες» σύνολο του $\hat{S}_z$ είναι $\left|+\right\rangle$ και $\left|-\right\rangle$, ή ότι

$$\hat{S}_z = \hbar/2 \left|+\right\rangle\left\langle+\right| - \hbar/2 \left|-\right\rangle\left\langle-\right|$$

Άρα στην περίπτωση όπου $a' = \pm \hbar/2$ ο τελεστής $\prod_{a''(\neq a')} \frac{\left(\hat{\mathrm{A}} - a''\right)}{a' - a''}$ θα είναι ισοδύναμος των προβολικών τελεστών $\left|+\right\rangle\left\langle+\right|$ και $\left|-\right\rangle\left\langle-\right|$,αντιστοίχως.

<u>Άσκηση 2.5</u>

Ένα παρατηρήσιμο μέγεθος στην κβαντική μηχανική αναπαρίσταται από την παρακάτω 3×3 μήτρα:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i. **Βρείτε τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα αυτού του μεγέθους και τις αντίστοιχες ιδιοτιμές. Υπάρχει κάποιος εκφυλισμός;**
ii. **Δώστε ένα φυσικό παράδειγμα που να σχετίζεται με τα παραπάνω.**