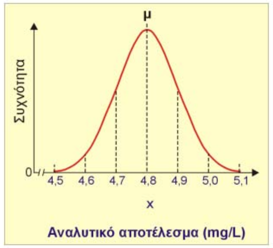
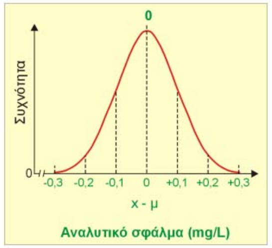
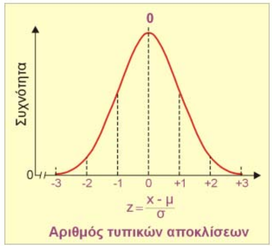
Κανονική (κατά Gauss) κατανομή (1/4)

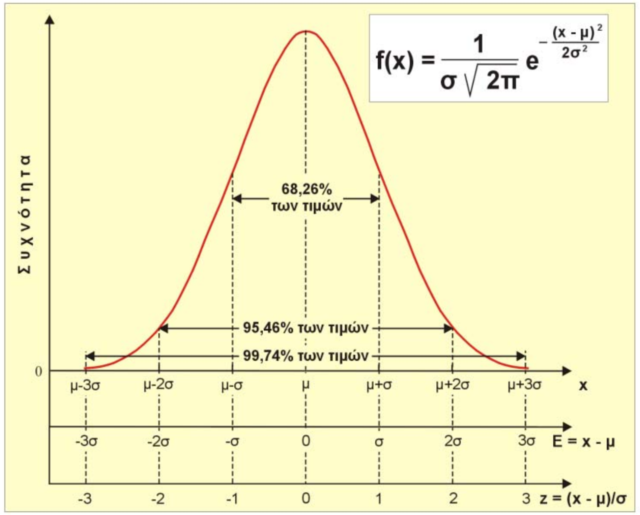
Πώς από μια κανονική κατανομή που αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο πληθυσμό (π.χ. με μ = 4,8 και σ = 0,1) καταλήγουμε σε ένα "παγκόσμιο" τρόπο παρουσίασης της κανονικής κατανομής.







Κανονική (κατά Gauss) κατανομή (2/4)

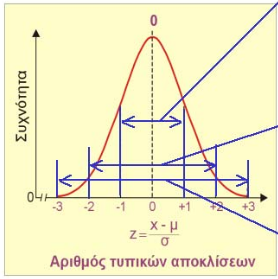


Κανονική (κατά Gauss) κατανομή (3/4)

Πίνακας τιμών του ολοκληρώματος

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-z}^{t=+z} e^{-t^2} dt$$

όπου : $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0,0797	0,0876	0,0955	0,1034	0,1113	0,1192	0,1271	0,1350	0,1428	0,1507
0,2	0,1585	0,1663	0,1753	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2127	0,2205	0,2282
0,3	0,2358	0,2434	0,2510	0,2586	0,2661	0,2737	0,2812	0,2886	0,2961	0,3035
0,4	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3401	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3759
0,5	0,3829	0,3899	0,3969	0,4039	0,4177	0,4108	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4907	0,4971	0,5035	0,5098
0,7	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5467	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,8	0,5763	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6210	0,6265
0,9	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6528	0,6579	0,6629	0,6680	0,6729	0,6779
1,0	**0,6827**	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	0,7287	0,7330	0,7373	0,7415	0,7457	0,7499	0,7540	0,7580	0,7620	0,7660
1,2	0,7699	0,7737	0,7775	0,7813	0,7850	0,7887	0,7923	0,7959	**0,7995**	**0,8029**
1,3	0,8064	0,8098	0,8132	0,8165	0,8198	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,4	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8529	0,8557	0,8584	0,8611	0,8638
1,5	0,8664	0,8690	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882
1,6	0,8904	0,8926	0,8926	**0,8990**	**0,9011**	0,9031	0,9051	0,9051	0,9070	0,9090
1,7	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9181	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9265
1,8	0,9281	0,9297	0,9312	0,9327	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9399	0,9412
1,9	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	**0,9500**	0,9512	0,9523	0,9534
2,0	**0,9545**	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9615	0,9625	0,9633
2,1	0,9643	0,9651	0,9660	0,9668	0,9676	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,2	0,9722	0,9729	0,9736	0,9743	0,9749	0,9756	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,3	0,9786	0,9791	0,9797	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9832
2,4	0,9836	0,9840	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9869	0,9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	**0,9898**	**0,9901**	0,9904
2,6	0,9907	0,9909	0,9912	0,9915	0,9917	0,9920	0,9922	0,9924	0,9926	0,9929
2,7	0,9931	0,9933	0,9935	0,9937	0,9939	0,9940	0,9942	0,9944	0,9946	0,9947
2,8	0,9949	0,9950	0,9952	0,9953	0,9955	0,9956	0,9958	0,9959	0,9960	0,9961
2,9	0,9963	0,9964	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972
3,0	**0,9973**	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980

Κανονική (κατά Gauss) κατανομή (4/4)

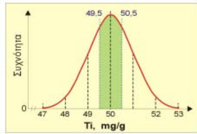
Τυπικές εφαρμογές πίνακα ολοκληρώματος Gauss:

Η περιεκτικότητα ορυκτού σε Ti είναι 50 mg/g. Η τυπική απόκλιση (σ) ενός προσδιορισμού Ti είναι 1,0 mg/g και η κατανομή του τυχαίου σφάλματος είναι κανονική.

(1) Ποια η πιθανότητα μία μέτρηση να βρεθεί στην περιοχή 49,5-50,5:

Απάντηση: Η περιοχή είναι συμμετρική ως προς τη μέση και καλύπτει περιοχή ισοδύναμη προς ±0,5σ, οπότε P = $P_{(z=0,5)}$ = **0,3829** ή **38,3%**.

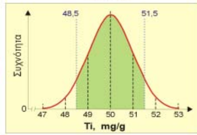
(1)



(2) Ποια η πιθανότητα μία μέτρηση να βρεθεί στην περιοχή 48,5-51,5:

Απάντηση: Η περιοχή είναι συμμετρική ως προς τη μέση και καλύπτει περιοχή ισοδύναμη προς ±1,5σ, οπότε P = $P_{(z=1,5)}$ = **0,8664** ή **86,6%**.

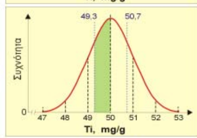
(2)



(3) Ποια η πιθανότητα μία μέτρηση να βρεθεί στην περιοχή 49,3-50,0:

Απάντηση: Η περιοχή αντιστοιχεί στο 1/2 της συμμετρικής περιοχής 49,3-50,7 οπότε P = $P_{(z=0,7)}$ / 2 = 0,5161 / 2 = **0,2580** ή **25,8%**.

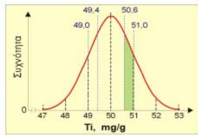
(3)



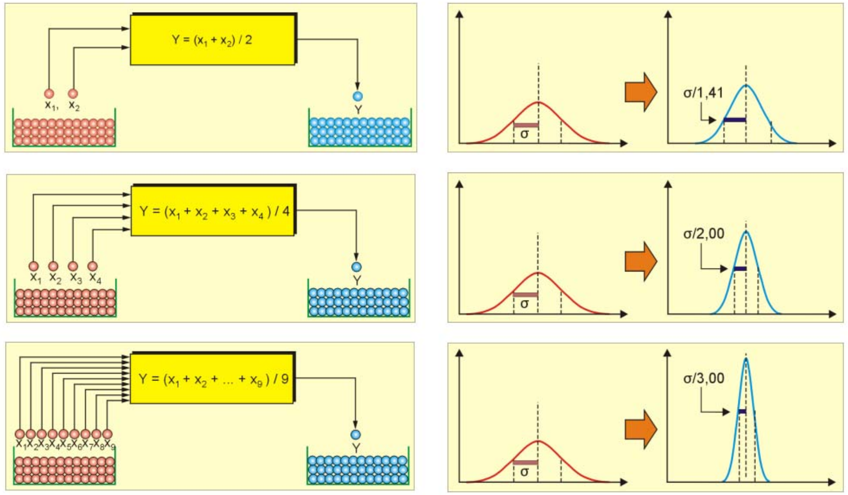
(4) Ποια η πιθανότητα μία μέτρηση να βρεθεί στην περιοχή 50,6-51,0:

Απάντηση: Η περιοχή αντιστοιχεί στο 1/2 της διαφοράς των συμμετρικών περιοχών 49,0-51,0 και 49,4-50,6 οπότε P = [$P_{(z=1,0)}$ – $P_{(z=0,6)}$] / 2 = (0,6827 – 0,4515) / 2 = **0,1156** ή **11,6%**.

(4)



Κατανομή μέσων τιμών (1/2)



Κατανομή μέσων τιμών (2/2)

$$\sigma_{\overline{x}} = \sigma_x / \sqrt{N}$$

Τυπικές αριθμητικές εφαρμογές:

Η περιεκτικότητα ορυκτού σε Ti είναι 50 mg/g. Η τυπική απόκλιση (σ) ενός προσδιορισμού Ti είναι 1,0 mg/g και η κατανομή του τυχαίου σφάλματος είναι κανονική.

(1) Ποια η πιθανότητα η μέση τιμή 5 μετρήσεων να βρεθεί στην περιοχή 49,5-50,5 ;

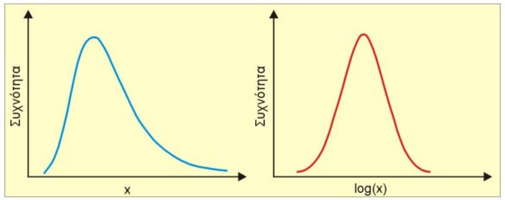
Απάντηση: Η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής 5 μετρήσεων είναι 1,0 / $5^{1/2}$ = 0,447. Η ζητούμενη περιοχή είναι συμμετρική ως προς τη μέση τιμή και καλύπτει περιοχή που αντιστοιχεί σε $\pm(0{,}50/0{,}447)\sigma = \pm 1{,}119\sigma$, οπότε (από τον πίνακα των τιμών του ολοκληρώματος Gauss) P = P(z=1,119) = **0,737** ή **73,7%**.

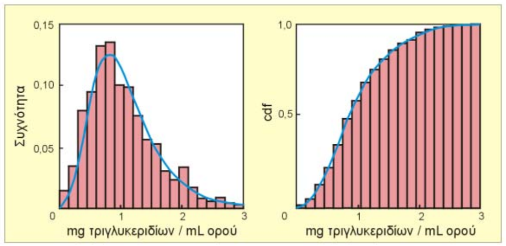
(2) Πόσες μετρήσεις πρέπει να πραγματοποιηθούν κατ' ελάχιστο, ώστε η μέση τιμή τους να έχει πιθανότητα 90% να βρίσκεται στην περιοχή 49,5-50,5 ;

Απάντηση: Από τον πίνακα των τιμών του ολοκληρώματος Gauss βρίσκουμε ότι για P=0,900, είναι z=1,63, οπότε το ζητούμενο εύρος ±0,50 θα πρέπει να αντιστοιχεί σε ±1,63σ, επομένως θα πρέπει να είναι σ = 0,50 / 1,63 = 0,307. Οπότε (με βάση τον παραπάνω τύπο): N = $(1{,}00 / 0{,}307)^2$ = 10,6, επομένως θα πρέπει να ληφθεί η μέση τιμή τουλάχιστον **11** μετρήσεων.

Παρατήρηση: Εάν η ζητούμενη πιθανότητα ήταν 95% θα υπολογίζαμε N = **16**, για πιθανότητα 99% θα υπολογίζαμε N = **27** και για πιθανότητα 99,8% (ουσιαστικά **βεβαιότητα**) θα υπολογίζαμε N = **39**.

Παράγωγες κατανομές: Λογαριθμοκανονική κατανομή (Log-normal)





Στατιστικές δοκιμασίες σημαντικότητας:
Μηδενική και εναλλακτική υπόθεση

Οι στατιστικές δοκιμασίες οδηγούν σε ένα από τα δύο:
στην **αποδοχή** της **μηδενικής υπόθεσης** (null hypothesis, H_o)
ή
στην **απόρριψή** της με δεδομένα όρια μέγιστης πιθανότητας λάθους (δηλ. εσφαλμένης απόφασης) [οπότε γίνεται αποδεκτή η **εναλλακτική υπόθεση** (alternative hypothesis, H_a)]

Μηδενική υπόθεση (H_o): Τυπικά 'σενάρια'.

- Οι όποιες διαφορές μεταξύ της εξεταζόμενης τιμής και της πραγματικής **είναι τυχαίες**.
- Η εξεταζόμενη τιμή **ανήκει** στο δεδομένο πληθυσμό.
- Οι διαφορές μεταξύ των εξεταζόμενων παραμέτρων **δεν είναι σημαντικές***.

Εναλλακτική υπόθεση (H_a) : Τυπικά 'σενάρια'.

- Οι όποιες διαφορές μεταξύ της εξεταζόμενης τιμής και της πραγματικής **δεν είναι τυχαίες**.
- Η εξεταζόμενη τιμή **δεν ανήκει** στο δεδομένο πληθυσμό.
- Οι διαφορές μεταξύ των εξεταζόμενων παραμέτρων **είναι σημαντικές***.

$$P(H_o) + P(H_a) = 1$$

* **Προσοχή** στο επίθετο "σημαντικός": σημαίνει ότι κάτι "έχει ιδιαίτερη σημασία" και όχι ότι "είναι μεγάλο"!!

Στατιστικές δοκιμασίες σημαντικότητας:
Παραδείγματα H_o – H_a και είδη στατιστικών σφαλμάτων

Μηδενική υπόθεση, H_o	Εναλλακτική υπόθεση, H_a
$\overline{x} = \mu$	$\overline{x} \neq \mu$
$\mu_A = \mu_B$	$\mu_A \neq \mu_B$
$\sigma_A = \sigma_B$	$\sigma_A \neq \sigma_B$
$X_i \in A_N(\mu,\sigma)$	$X_i \notin A_N(\mu,\sigma)$

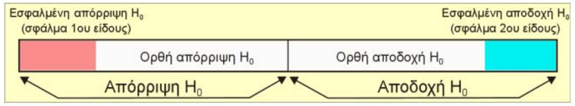
Συμπέρασμα δοκιμασίας	Πραγματική κατάσταση	
	Ισχύει η H_o	Ισχύει η H_a
Η H_o απορρίπτεται	**Σφάλμα 1ου είδους**	**Ορθό συμπέρασμα**
Η H_a απορρίπτεται	**Ορθό συμπέρασμα**	**Σφάλμα 2ου είδους**

Σφάλμα 1ου είδους: Απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης ενώ ισχύει (producer's risk)

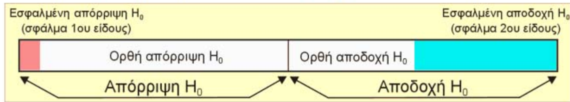
Σφάλμα 2ου είδους: Αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης ενώ δεν ισχύει (consumer's risk)

Στατιστικές δοκιμασίες σημαντικότητας:
Τί συνεπάγεται η αυστηρή αποφυγή του κάθε είδους σφάλματος;

Περιγραφή των πιθανών αποτελεσμάτων μιας δοκιμασίας:

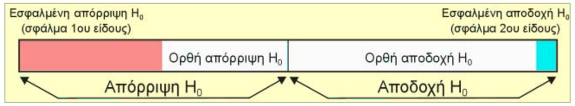


Αν επιδιώξουμε να μειώσουμε την πιθανότητα σφάλματος 1ου είδους, αυξάνουμε την πιθανότητα σφάλματος 2ου είδους



Θα μπορούσαμε να αποφύγουμε με **βεβαιότητα** το σφάλμα 1ου είδους αν δεν απορρίπταμε **ποτέ** τη μηδενική υπόθεση **(!!)**

Αν επιδιώξουμε να μειώσουμε την πιθανότητα σφάλματος 2ου είδους, αυξάνουμε την πιθανότητα σφάλματος 1ου είδους



Θα μπορούσαμε να αποφύγουμε με **βεβαιότητα** το σφάλμα 2ου είδους αν απορρίπταμε **πάντοτε** τη μηδενική υπόθεση **(!!)**

Στατιστικές δοκιμασίες σημαντικότητας:
Η έννοια της στάθμης (ή επιπέδου) εμπιστοσύνης

Κάθε στατιστική δοκιμασία ελέγχου ισχύος μιας μηδενικής υπόθεσης (εξαρτάται από το είδος της δοκιμασίας) διεξάγεται σε μια (εκ των προτέρων) καθορισμένη **στάθμη εμπιστοσύνης** (confidence level, CL).

Η στάθμη εμπιστοσύνης **εκφράζει την ελάχιστη πιθανότητα** (%) αποφυγής σφάλματος 1 ου είδους.

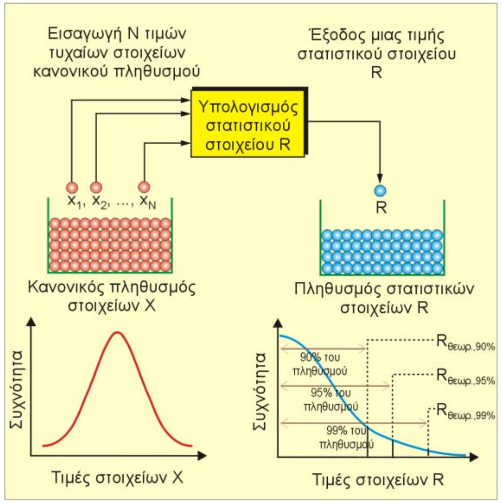
Η συνηθέστερες στάθμες εμπιστοσύνης είναι:

90%: Σχετικά εύκολη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, αφού δεχόμαστε μέχρι και 1 στις 10 απορρίψεις να είναι λανθασμένη ή (ισοδύναμα) η πιθανότητα σφάλματος 1ου είδους να είναι **100-90 = 10% ή μικρότερη**.

95%: Η **συνηθέστερα χρησιμοποιούμενη στάθμη εμπιστοσύνης** στη χημική ανάλυση (και όχι μόνο). Δεχόμαστε το πολύ 1 στις 20 απορρίψεις να είναι λανθασμένη ή (ισοδύναμα) η πιθανότητα σφάλματος 1ου είδους να είναι **100-95 = 5% ή μικρότερη**.

99%: Πολύ δύσκολη η απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης. Δεχόμαστε το πολύ 1 στις 100 απορρίψεις να είναι λανθασμένη ή (ισοδύναμα) η πιθανότητα σφάλματος 1ου είδους να είναι **100-99 = 1% ή μικρότερη**. **Ο κίνδυνος σφάλματος 2ου είδους είναι αυξημένος.**

Ποιο είναι το νόημα των θεωρητικών (ή κρίσιμων) τιμών των στατιστικών στοιχείων



• Όλοι οι "σχηματισμοί" τιμών x προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό και επομένως ισχύει γι' αυτούς η μηδενική υπόθεση (κάτι όμως που εμείς δεν το ξέρουμε).

• Συμβαίνει κάποιοι "ακραίοι" σχηματισμοί Ν στοιχείων να οδηγούν σε "ακραίες" τιμές στατιστικού στοιχείου.

• Απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση για τους σχηματισμούς αυτούς (διαπράττοντας εν αγνοία μας σφάλμα 1ου είδους –επειδή δεν ξέρουμε ότι προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό-), ώστε να αποφύγουμε το ισχυρό πλέον ενδεχόμενο σφάλματος 2ου είδους

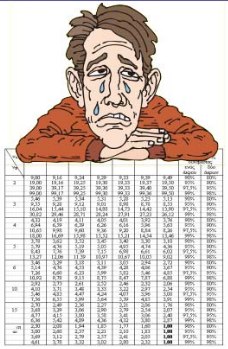
Λαϊκή παροιμία που ταιριάζει στην περίπτωση:

"Μαζί με τα ξερά (καμιά φορά) καίγονται και τα χλωρά"

Στατιστικές δοκιμασίες σημαντικότητας:
Γενικοί τρόποι διεξαγωγής τους

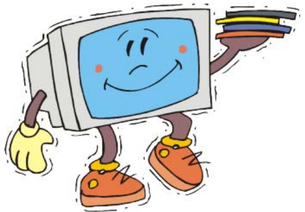
1ος τρόπος:

Ο "**παραδοσιακός τρόπος**", που διεξάγεται με τη βοήθεια στατιστικών πινάκων κρίσιμων (ή θεωρητικών) τιμών.



2ος τρόπος:

Ο "**σύγχρονος τρόπος**", που διεξάγεται με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών και στατιστικών προγραμμάτων.



Στατιστικές δοκιμασίες σημαντικότητας:
Δοκιμασίες με τη βοήθεια στατιστικών πινάκων κρίσιμων τιμών

Βήματα:

1ο βήμα. Αποφασίζουμε σε ποιο επίπεδο εμπιστοσύνης θα δουλέψουμε (π.χ. σε επίπεδο 95%).

2ο βήμα. Υπολογίζουμε την **"πειραματική"** τιμή του **στατιστικού στοιχείου** (statistic) $R_{\text{πειρ.}}$ για τη δεδομένη δοκιμασία. Χρησιμοποιούμε κάποια εξίσωση, όπου εισάγουμε τις τιμές των μετρήσεων και συνήθως τον αριθμό των μετρήσεων

3ο βήμα. Στον πίνακα αναζητούμε τη **"θεωρητική"** τιμή του στατιστικού στοιχείου $R_{\text{θεωρ.}}$ που αντιστοιχεί στο επίπεδο εμπιστοσύνης που επιλέξαμε και στον αριθμό των μετρήσεων.

4ο βήμα. Συγκρίνουμε την τιμή $R_{\text{πειρ.}}$ με τη $R_{\text{θεωρ.}}$ Αν $R_{\text{πειρ.}} > R_{\text{θεωρ.}}$ (συνήθως) τότε η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται, ενώ στην αντίθετη περίπτωση η μηδενική υπόθεση κατακρατείται.

5ο βήμα. Αναφέρουμε το αποτέλεσμα χωρίς να ξεχάσουμε να αναφέρουμε και το επίπεδο εμπιστοσύνης, π.χ.: "Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% η μέση τιμή των μετρήσεων διαφέρει σημαντικά από την πραγματική τιμή". Συνήθως αναφέρουμε και τις τιμές $R_{\text{πειρ.}}$ και $R_{\text{θεωρ.}}$ για μια ημιποσοτική (νοερή) εκτίμηση του πόσο κοντά ήμασταν στην απόρριψη ή στην αποδοχή.

Στατιστικές δοκιμασίες σημαντικότητας:
Δοκιμασίες με τη βοήθεια στατιστικών προγραμμάτων

Βήματα:

1ο βήμα. Εισάγουμε τις τιμές των μετρήσεων στο λογιστικό φύλλο που παρουσιάζεται μετά την επιλογή της δοκιμασίας από τον πίνακα επιλογών (menu).

2ο βήμα. Εκτελούμε.

3ο βήμα. Στα δεδομένα και τα διάφορα περιγραφικά στοιχεία που παρουσιάζονται αναζητούμε το "περίφημο" P (= probability). Θα έχει μια τιμή στην περιοχή 0-1. Η τιμή P αντιπροσωπεύει **την πιθανότητα σφάλματος πρώτου είδους**. Ουσιαστικά τελειώσαμε !!

Ερμηνεία του P (σύνδεση με τον παραδοσιακό τρόπο διεξαγωγής των δοκιμασιών):

Εάν P>0,10, τότε η μηδενική υπόθεση είναι αποδεκτή σε CL 90% (και επομένως σε CL 95% και 99%)

Εάν 0,10>P>0,05, τότε η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε CL 90%, αλλά είναι αποδεκτή σε CL 95% (και επομένως σε CL 99%)

Εάν 0,05>P>0,01, τότε η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και σε CL 95%, αλλά είναι αποδεκτή σε CL 99%.

Εάν 0,01>P τότε η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και σε CL 99% (είναι πλέον σχεδόν βέβαιο ότι δεν ισχύει η μηδενική υπόθεση).

ΓΕΝΙΚΑ: όσο μεγαλύτερο είναι το P, τόσο περισσότερο είμαστε βέβαιοι ότι ισχύει η μηδενική υπόθεση και όσο μικρότερο είναι το P τόσο περισσότερο είμαστε βέβαιοι ότι δεν ισχύει.

Στατιστικές δοκιμασίες σημαντικότητας:
Γιατί η πληροφόρηση που μας παρέχει το P είναι πληρέστερη σε σχέση με αυτήν που μας παρέχει η σύγκριση με τις κρίσιμες τιμές των πινάκων;

Ο υπολογιστής μέσω σύνθετων μαθηματικών εξισώσεων (που αντιστοιχούν στη δεδομένη δοκιμασία) υπολογίζει για τη δεδομένη ομάδα (ή ομάδες) τιμών μετρήσεων **επακριβώς την πιθανότητα** να ανήκει ή όχι στον ίδιο πληθυσμό.

Παραδείγματα:

Αν **P = 0,608**: Αν απορρίψω την H_o έχω **πιθανότητα 60,8%** να κάνω σφάλμα 1ου είδους. Οι πίνακες θα μου έλεγαν ότι η H_o είναι αποδεκτή σε 90%, επομένως αν απορρίψω την H_o θα έχω **πιθανότητα 10% τουλάχιστον** να κάνω σφάλμα 1ου είδους.

Αν **P = 0,039**: Αν απορρίψω την H_o έχω **πιθανότητα 3,9%** να κάνω σφάλμα 1ου είδους. Οι πίνακες θα μου έλεγαν ότι η H_o απορρίπτεται σε στάθμη 95% (και 90%) όχι όμως σε στάθμη 99%, επομένως αν απορρίψω την H_o θα έχω **πιθανότητα κάπου μεταξύ 5% και 1%** να κάνω σφάλμα 1ου είδους.

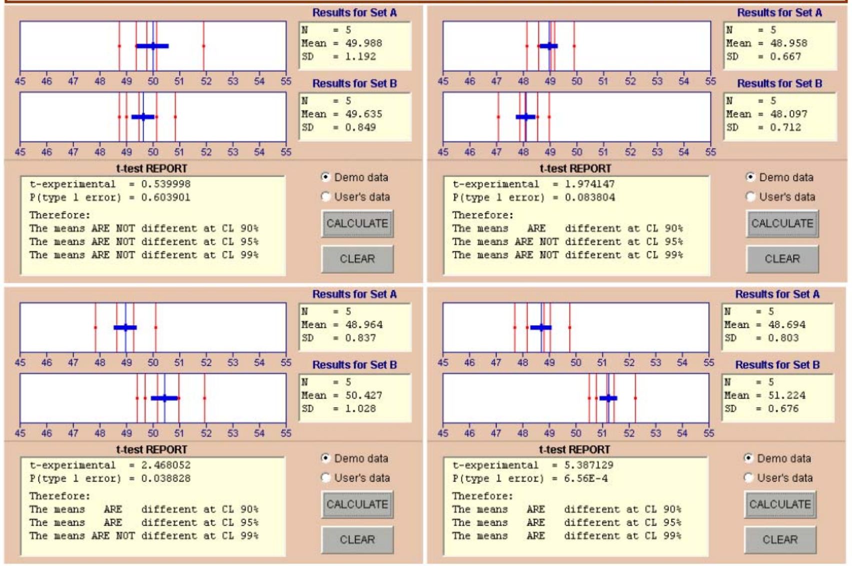
Αν **P = 0,00041**: Αν απορρίψω την H_o έχω **πιθανότητα μόλις 0,041%** να κάνω σφάλμα 1ου είδους. Επομένως έχω σχεδόν βεβαιότητα ότι η H_o δεν ισχύει. Οι πίνακες θα μου έλεγαν ότι έχω **πιθανότητα το πολύ 1%** να κάνω σφάλμα 1ου είδους.

Η στατιστική δοκιμασία μέσω στατιστικού προγράμματος μας <u>παρέχει επακριβώς την πιθανότητα</u> σφάλματος 1ου είδους.

Η στατιστική δοκιμασία μέσω πινάκων μας <u>παρέχει μόνο περιοχές πιθανοτήτων</u> σφάλματος 1ου είδους.

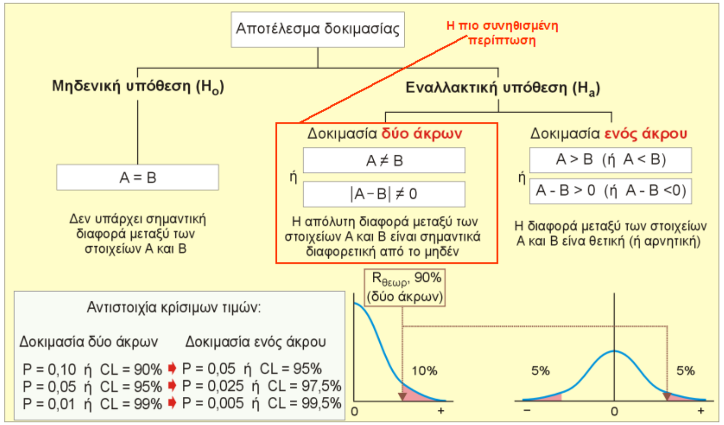
t-test: Διαφέρουν σημαντικά δύο μέσες τιμές;

Ένα απλό demo στο site: www.chem.uoa.gr/applets/AppletTtest/App_Ttest1.html



Στατιστικές δοκιμασίες σημαντικότητας:

Δοκιμασίες δύο άκρων (two-tailed) και δοκιμασίες ενός άκρου (one-tailed)



Πρακτικά συμπεράσματα: Εάν επιθυμούμε εκτέλεση δοκιμασίας **ενός άκρου**:

(1) Για **CL 95%** θα χρησιμοποιήσουμε την κρίσιμη τιμή της αντίστοιχης δοκιμασίας δύο άκρων (αυτές συνήθως δίνονται στους πίνακες) σε **CL 90%**.

(2) Εάν ο υπολογιστής μας δίνει τιμή (π.χ.) **P = 0,042** (για δοκιμασία 2-άκρων), εμείς θα θεωρήσουμε ότι είναι P = 0,042/2 = **0,021**

Δοκιμασία Student* ή δοκιμασία t:

Η πλέον χρησιμοποιούμενη στατιστική δοκιμασία στη χημική ανάλυση

Σύγκριση πειραματικής μέσης τιμής ($\bar{x}$) και πραγματικής (μ)

$$t_{exp} = \frac{|\mu - \bar{x}|\sqrt{N}}{s}$$

Σύγκριση δύο πειραματικών μέσων τιμών ($\bar{x}_A$, $\bar{x}_B$)

$$t_{exp} = \frac{|\bar{x}_A - \bar{x}_B|}{s_{A,B}\sqrt{\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}}} \quad \text{όπου: } s_{A,B} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_A}(\bar{x}_A - x_{i,A})^2 + \sum_{i=1}^{N_B}(\bar{x}_B - x_{i,B})^2}{N_A + N_B - 2}}$$

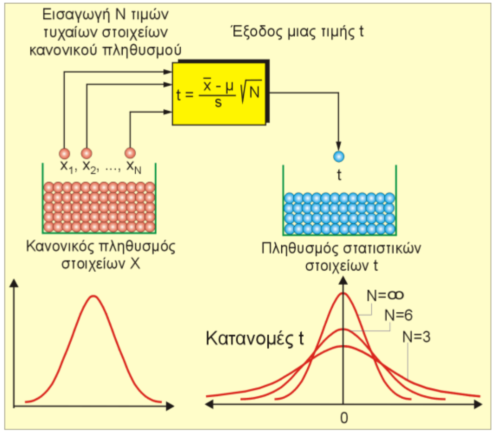
Σύγκριση παρατηρήσεων κατά ζεύγη

$$t_{exp} = \frac{|\bar{d}|\sqrt{N}}{s_d}$$

* Ψευδώνυμο του W.S. Gossett (1905)

Δοκιμασία Student (ή δοκιμασία t):

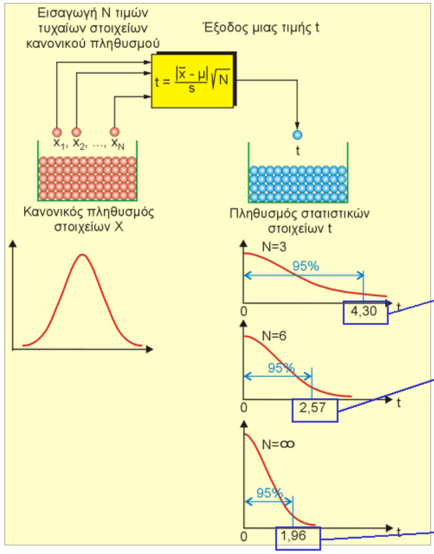
Κατανομή t



- Η κανονική κατανομή (κατανομή Gauss) αποδίδει τη διασπορά των τιμών z (αριθμός πληθυσμιακών τυπικών αποκλίσεων, σ) ως προς την κεντρική τιμή.
- Η κατανομή t αποδίδει τη διασπορά των τιμών t (αριθμός δειγματικών τυπικών αποκλίσεων, s) ως προς την κεντρική τιμή.
- Η κατανομή t εμφανίζει ιδιαίτερα έντονη διασπορά σε μικρές τιμές N, λόγω της έντονης αμφιβολίας ως προς το κατά πόσο η τιμή s είναι αξιόπιστη εκτιμήτρια της σ.
- Όσο η τιμή N αυξάνει, τόσο η κατανομή t τείνει προς την κανονική κατανομή.

Δοκιμασία Student (ή δοκιμασία t):

Θεωρητικές (κρίσιμες) τιμές του στατιστικού στοιχείου t



Θεωρητικές τιμές t για δοκιμασίες δύο άκρων

Βαθμοί ελευθερίας	Στάθμη εμπιστοσύνης			
ν = N – 1	80%	90%	95%	99%
1	3,078	6,314	12,706	63,657
2	1,886	2,920	4,303	9,925
3	1,638	2,353	3,182	5,841
4	1,533	2,132	2,776	4,604
5	1,476	2,015	2,571	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,707
7	1,415	1,895	2,365	3,500
8	1,397	1,860	2,306	3,355
9	1,383	1,833	2,262	3,250
10	1,372	1,812	2,228	3,169
11	1,363	1,796	2,201	3,106
12	1,356	1,782	2,179	3,055
15	1,341	1,753	2,131	2,947
20	1,325	1,725	2,086	2,845
30	1,310	1,697	2,042	2,787
∞	1,282	1,645	1,960	2,576

Δοκιμασία Student (ή δοκιμασία t): Παράδειγμα 1

Μια υπό δοκιμή αναλυτική μέθοδος προσδιορισμού ουσίας Α παρέχει τα ακόλουθα αναλυτικά αποτελέσματα (% περιεκτικότητα) σε δείγμα: 5,42, 5,67, 5,75, 5,51, 5,82, 5,55.

Σε στάθμη εμπιστοσύνης CL=95% να εξετασθεί εάν στη δοκιμαζόμενη μέθοδο ενυπάρχει συστηματικό σφάλμα, εάν η πραγματική τιμή (Α%) στο δείγμα είναι: α) 5,64, β) 5,76, γ) 5,83 και δ) 6,12.

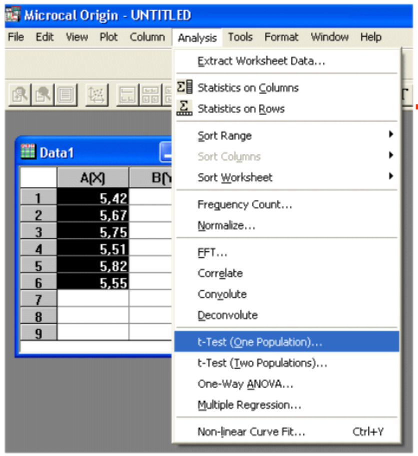
Απάντηση: Έχουμε: $\bar{x}$ = 5,62 και s = 0,153 και για ν = N - 1 = 5 και CL=95% $t_{θεωρ.}$ = **2,571**, οπότε (κατά περίπτωση α-δ):

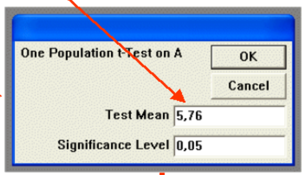
(α)	(β)	(γ)	(δ)
t_{exp} = $\lvert 5{,}64 - 5{,}62 \rvert\sqrt{6}$ / 0,1526 = **0,321**	t_{exp} = $\lvert 5{,}76 - 5{,}62 \rvert\sqrt{6}$ / 0,1526 = **2,247**	t_{exp} = $\lvert 5{,}83 - 5{,}62 \rvert\sqrt{6}$ / 0,1526 = **3,371**	t_{exp} = $\lvert 6{,}12 - 5{,}62 \rvert\sqrt{6}$ / 0,1526 = **8,026**
Δεν υπάρχει συστηματικό σφάλμα σε CL=90%	Υπάρχει συστηματικό σφάλμα σε CL=90%	Υπάρχει συστηματικό σφάλμα σε CL=90%	Υπάρχει συστηματικό σφάλμα σε CL=90%
Δεν υπάρχει συστηματικό σφάλμα σε CL=95%	Δεν υπάρχει συστηματικό σφάλμα σε CL=95%	Υπάρχει συστηματικό σφάλμα σε CL=95%	Υπάρχει συστηματικό σφάλμα σε CL=95%
Δεν υπάρχει συστηματικό σφάλμα σε CL=99%	Δεν υπάρχει συστηματικό σφάλμα σε CL=99%	Δεν υπάρχει συστηματικό σφάλμα σε CL=99%	Υπάρχει συστηματικό σφάλμα σε CL=99%
P = 0,7611	**P = 0,0745**	**P = 0,0199**	**P = 0,0005**

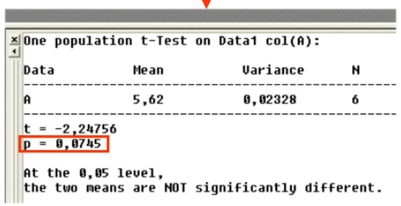
Δοκιμασία Student (ή δοκιμασία t): Παράδειγμα 1

Μια υπό δοκιμή αναλυτική μέθοδος προσδιορισμού ουσίας Α παρέχει τα ακόλουθα αναλυτικά αποτελέσματα (% περιεκτικότητα) σε δείγμα: 5,42, 5,67, 5,75, 5,51, 5,82, 5,55.

Σε στάθμη εμπιστοσύνης CL=95% να εξετασθεί εάν στη δοκιμαζόμενη μέθοδο ενυπάρχει συστηματικό σφάλμα, εάν η πραγματική τιμή (Α%) στο δείγμα είναι: α) 5,64, β) 5,76, γ) 5,83 και δ) 6,12.



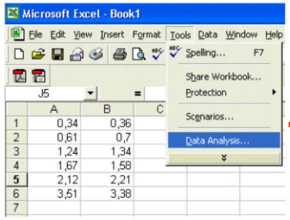


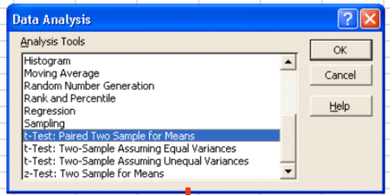


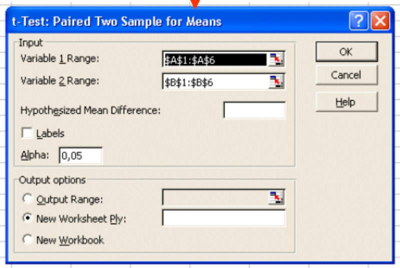
Δοκιμασία Student (ή δοκιμασία t): Παράδειγμα 2

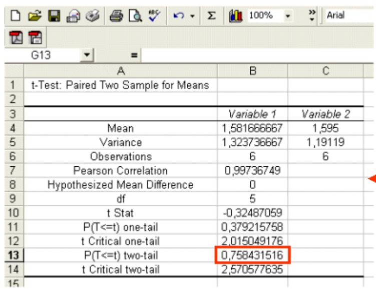
Μια σειρά δειγμάτων αναλύεται με τις μεθόδους Α και Β (βλ. Πίνακα). Να προσδιορισθεί αν υπάρχει συστηματική διαφορά μεταξύ των δύο μεθόδων.

α/α δείγματος	1	2	3	4	5	6
Μέθοδος Α	0,34	0,61	1,24	1,67	2,12	3,51
Μέθοδος Β	0,36	0,70	1,34	1,58	2,21	3,38









	A	B	C
1	t-Test: Paired Two Sample for Means		
2			
3		Variable 1	Variable 2
4	Mean	1,581666667	1,595
5	Variance	1,323736667	1,19119
6	Observations	6	6
7	Pearson Correlation	0,99736749	
8	Hypothesized Mean Difference	0	
9	df	5	
10	t Stat	-0,32487059	
11	P(T<=t) one-tail	0,379215758	
12	t Critical one-tail	2,015049176	
13	P(T<=t) two-tail	0,758431516	
14	t Critical two-tail	2,570577635	