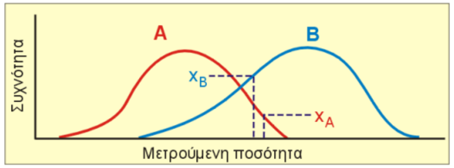
Έκτροπες τιμές (outliers): Q-test

Ως **έκτροπη** (outlier) σε ένα πληθυσμιακό δείγμα χαρακτηρίζεται κάθε τιμή, που ανήκει σε διαφορετικό πληθυσμό από τον πληθυσμό της πλειονότητας των μετρήσεων.



Η δοκιμασία Q (quotient) του Dixon βασίζεται στην κατανομή του λόγου υποπεριοχών (sub-range ratio) μιας διατεταγμένης σειράς μετρήσεων

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n$$

που έχει ληφθεί από το ίδιο το πληθυσμιακό δείγμα.

$$Q_{exp} = \frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1} \quad \text{(ύποπτη τιμή η } x_1\text{)}$$

$$Q_{exp} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1} \quad \text{(ύποπτη τιμή η } x_n\text{)}$$

Κρίσιμες τιμές Q

n	80%	90%	95%	99%
3	0,886	0,941	0,970	0,994
4	0,679	0,765	0,829	0,926
5	0,557	0,642	0,710	0,821
6	0,482	0,560	0,625	0,740
7	0,434	0,507	0,568	0,680
8	0,399	0,468	0,526	0,634
9	0,370	0,437	0,493	0,598
10	0,349	0,412	0,466	0,568
11	0,332	0,392	0,444	0,542
12	0,318	0,376	0,426	0,522

Προσοχή: Αν απορριφθεί μια τιμή ως έκτροπη, δεν επιτρέπεται η επανάληψη της δοκιμασίας στις υπόλοιπες τιμές της ομάδας μετρήσεων !!

Έκτροπες τιμές (outliers):
Παραγωγή κρίσιμων τιμών Q με προσομοιώσεις Monte Carlo

Ένας απλός και γενικός τρόπος παραγωγής κρίσιμων τιμών για τη δοκιμασία Q με ικανοποιητική ακρίβεια και με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή περιγράφεται από το ακόλουθο διάγραμμα ροής:

1. Από ένα κανονικό πληθυσμό πάρε N τυχαία στοιχεία (x_1, x_2, …, x_N) (τυπικά N=3 έως 12)

2. Υπολόγισε την τιμή $Q_{πειρ}$ που αντιστοιχεί στο πλέον απόμακρο στοιχείο της ομάδας

3. Επανάλαβε τα στάδια **1** και **2** μέχρις ότου συλλεγεί ένας μεγάλος αριθμός (M) τιμών $Q_{πειρ}$ (τυπικά M=10000-30000)

4. Κατάταξε τις M τιμές $Q_{πειρ}$ κατά αυξανόμενη τιμή.

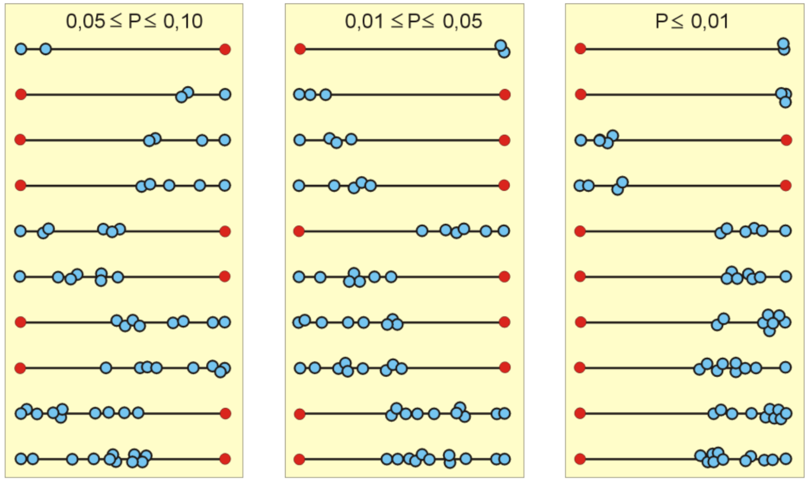
5. Εντόπισε τις τιμές με α/α 0,90xM, 0,95xM και 0,99xM (π.χ. Αν M=10000, τις τιμές με α/α 9000, 9500 και 9900). Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στις $Q_{θεωρ,0,90}$, $Q_{θεωρ,0,90}$ και $Q_{θεωρ,0,90}$ για ομάδες N στοιχείων.

Παρατήρηση: Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός M, τόσο ακριβέστερες είναι οι υπολογιζόμενες τιμές (Νόμος μεγάλων αριθμών).

* Ο τρόπος αυτός είναι γενικού χαρακτήρα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό κρίσιμων τιμών για κάθε δοκιμασία. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμος σε περιπτώσεις όπου ο προσδιορισμός των κρίσιμων τιμών με συγκεκριμένες μαθηματικές εξισώσεις είναι δύσκολος (περίπτωση κρίσιμων τιμών Q). Λεπτομερέστερη περιγραφή μπορεί να αναζητηθεί στο άρθρο:

C. E. EFSTATHIOU: "Stochastic Calculation of Critical Q-Test Values for the Detection of Outliers in Measurements", Journal of Chemical Education, **69**, 733-736 (1992).

Έκτροπες τιμές (outliers): Q-test

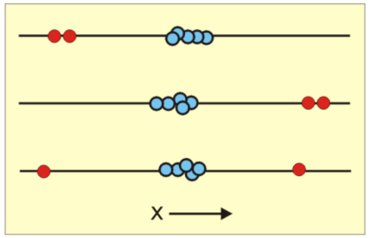


Απορρίπτονται σε CL 90% όχι όμως σε CL 95%

Απορρίπτονται σε CL 95% όχι όμως σε CL 99%

Απορρίπτονται σε CL 99%

Έκτροπες τιμές (outliers): Φαινόμενα κάλυψης



Η παρουσία μιας έκτροπης τιμής μπορεί να υποστεί “κάλυψη” (masking) από την παρουσία 2ης, 3ης κ.ο.κ. έκτροπης τιμής

Έχουν προταθεί δοκιμασίες για σύγχρονη ανίχνευση 2, 3 κ.ο.κ. εκτρόπων τιμών. Τυπικό παράδειγμα το QP-test (για 2 έκτροπες τιμές)*

$$QP = \frac{(x_3 - x_1)}{(x_n - x_1)} \cdot \frac{(x_3 - x_2)}{(x_n - x_2)} \quad \text{(ύποπτο ζεύγος: } x_1, x_2\text{)}$$

$$QP = \frac{(x_n - x_{n-2})}{(x_n - x_1)} \cdot \frac{(x_{n-1} - x_{n-2})}{(x_{n-1} - x_1)} \quad \text{(ύποπτο ζεύγος: } x_{n-1}, x_n\text{)}$$

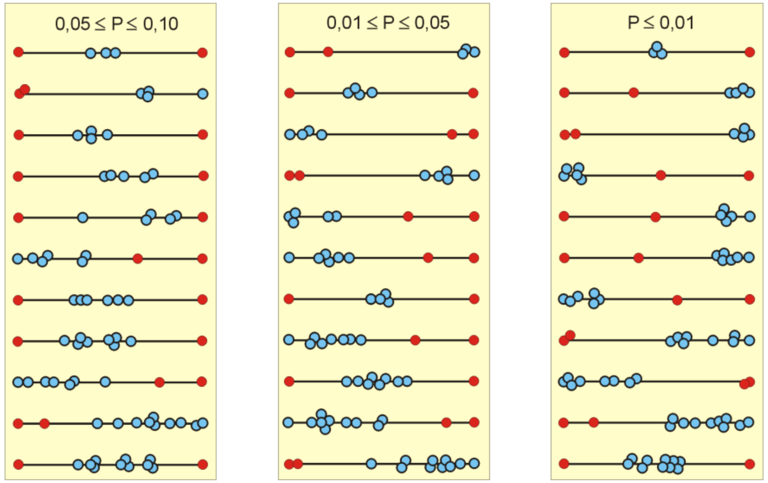
$$QP = \frac{(x_2 - x_1)}{(x_{n-1} - x_1)} \cdot \frac{(x_n - x_{n-1})}{(x_n - x_2)} \quad \text{(ύποπτο ζεύγος: } x_1, x_n\text{)}$$

Κρίσιμες τιμές QP

n	90%	95%	99%
5	0,644	0,732	0,867
6	0,448	0,532	0,695
7	0,336	0,410	0,555
8	0,265	0,325	0,458
9	0,220	0,271	0,384
10	0,185	0,231	0,332
11	0,163	0,204	0,297
12	0,145	0,181	0,266
13	0,129	0,162	0,235
14	0,118	0,149	0,219

* C. E. EFSTATHIOU: "A Test for the Simultaneous Detection of Two Outliers Among Extreme Values of Small Data Sets", Analytical Letters, **26(2)**, 379-390 (1993).

Έκτροπες τιμές (outliers):
Σύγχρονη ανίχνευση 2 εκτρόπων τιμών



Απορρίπτονται σε CL 90% όχι όμως σε CL 95%

Απορρίπτονται σε CL 95% όχι όμως σε CL 99%

Απορρίπτονται σε CL 99%

Έκτροπες τιμές (outliers): Παράδειγμα διαδοχικής ανίχνευσης 1 και στη συνέχεια 2 εκτρόπων τιμών

Η ομάδα 8 μετρήσεων της ίδιας ποσότητας είναι η ακόλουθη (κατά αυξανόμενη τιμή):

5,62, 7,31, 7,42, 7,66, 7,91, 8,01, 8,22 και 9,55.

Να εξεταστεί η ενδεχόμενη παρουσία **μίας ή δύο εκτρόπων τιμών** σε στάθμη εμπιστοσύνης 95%.

Λύση. Πρώτα εξετάζεται η υπόθεση της παρουσίας **μίας έκτροπης τιμής** (η πλέον απέχουσα τιμή είναι η **5,62**). Είναι:

$$Q = (7{,}31–5{,}62) / (9{,}55–5{,}62) = 0{,}430 < Q_{theor,0,95} \ (= 0{,}526 \text{ για } n = 8)$$

και επομένως η **5,62 δεν μπορεί να απορριφθεί.**

Είναι προφανές ότι η τιμή **5,62** "**καλύπτεται**" από την τιμή 9,55, απουσία της οποίας θα μπορούσε να απορριφθεί αφού: $(7{,}31 – 5{,}62) / (8{,}22–5{,}62) = 0{,}650 > Q_{theor,0,95}$ (= 0,568 για n = 7).

Επειδή απορρίπτεται η υπόθεση της (αποκλειστικά) μίας έκτροπης τιμής, μπορεί να εξεταστεί πλέον η υπόθεση παρουσίας (αποκλειστικά) **δύο εκτρόπων τιμών**. Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη για την περίπτωση εξίσωση βρίσκουμε:

$$QP = [(7{,}31–5{,}62) / (8{,}22–5{,}62)] \times [(9{,}55–8{,}22) / (9{,}55–7{,}31)] = 0{,}386 > QP_{theor,0,95} (= 0{,}325 \text{ για } n = 8),$$

Οπότε και οι δύο τιμές **5,62** και **9,55 μπορούν να απορριφθούν** με πιθανότητα ≥95% ότι δεν απορρίπτεται ζεύγος "έγκυρων" τιμών (δηλ. 0,05 ≥ P)

Σύγκριση διακυμάνσεων: Δοκιμασία F
(Snedecor's F-test)

Στατιστικό στοιχείο: $F = \dfrac{s_A^2}{s_B^2}$

Πρέπει να είναι $s_A \geq s_B$ έτσι, ώστε $F_{πειραμ} \geq 1$

Συχνά το F-test αποτελεί απαραίτητη προδοκιμασία για άλλες δοκιμασίες:

π.χ. Για τη σύγκριση 2 μέσων τιμών με δοκιμασία t είναι απαραίτητο να επιβεβαιωθεί προηγουμένως ότι δεν υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των τιμών s των 2 ομάδων μετρήσεων.

Πίνακας κρίσιμων τιμών F

ν_A / ν_B	2	3	4	5	6	10	∞ (2)	Στάθμη εμπιστοσύνης δοκιμασίας: ενός άκρου	δύο άκρων
	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,39	9,49	90%	80%
2	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,50	95%	90%
	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,40	39,50	97,5%	95%
	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,50	99%	98%
	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,23	5,13	90%	80%
3	9,55	9,28	9,12	9,01	8,98	8,78	8,53	95%	90%
	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,42	13,90	97,5%	95%
	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,23	26,12	99%	98%
	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,92	3,76	90%	80%
4	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	5,96	5,63	95%	90%
	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	8,84	8,26	97,5%	95%
	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,54	13,46	99%	98%
	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,30	3,10	90%	80%
5	5,79	4,76	5,19	5,05	4,95	4,74	4,36	95%	90%
	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,61	6,02	97,5%	95%
	13,27	12,06	11.39	10,97	10,67	10,05	9,02	99%	98%
	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	2,94	2,72	90%	80%
6	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,06	3,67	95%	90%
	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,46	4,85	97,5%	95%
	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	7,87	6,88	99%	98%
	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,32	2,06	90%	80%
10	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	2,97	2,54	95%	90%
	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,96	3,08	97,5%	95%
	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	4,85	3,91	99%	98%
	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,06	1,76	90%	80%
15	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,54	2,07	95%	90%
	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,06	2,40	97,5%	95%
	6,36	5,42	4,89	4,36	4,32	3,80	2,87	99%	98%
	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,60	**1,00**	90%	80%
∞ (2)	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,83	**1,00**	95%	90%
	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,05	**1,00**	97,5%	95%
	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,32	**1,00**	99%	98%

Σύγκριση διακυμάνσεων: Δοκιμασία F (Παράδειγμα)

Να εξεταστεί σε στάθμη εμπιστοσύνης 95% εάν υπάρχει σημαντική διαφορά στη διασπορά των αποτελεσμάτων που παρέχουν οι μέθοδοι Α και Β με βάση τις παρακάτω τιμές μετρήσεων:

Μέθ. Α: 4,41, 4,54, 4,89, 4,89, 5,12

Μέθ. Β: 4,52, 4,62, 4,68, 4,73

Λύση: Οι τυπικές αποκλίσεις είναι:

$s_A = 0{,}2888$ και $s_B = 0{,}09032$,

Οπότε $F_{πειραμ} = 0{,}2888^2 / 0{,}09032^2 = 10{,}22$

Εντοπίζουμε στον πίνακα την $F_{θεωρ}$ για δοκιμασία 2 άκρων (εξετάζεται μόνο αν υπάρχει διαφορά)

Βρίσκουμε ότι $F_{θεωρ} = 15{,}10$ και εφόσον

$F_{πειραμ} < F_{θεωρ}$ **δεν υφίσταται σημαντική διαφορά σε CL 95%.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Σε CL 90% υπάρχει σημαντική διαφορά.

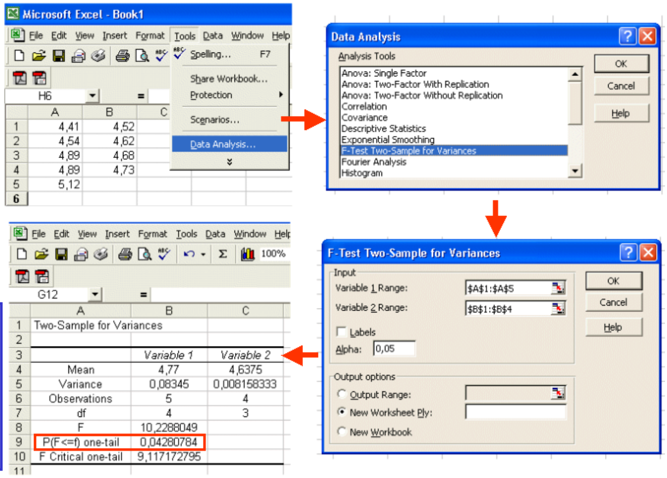
Πίνακας κρίσιμων τιμών F

ν_A / ν_B	2	3	4	5	6	10	∞ (2)	Στάθμη εμπιστοσύνης δοκιμασίας: ενός άκρου	δύο άκρων
	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,39	9,49	90%	80%
2	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,50	95%	90%
	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,40	39,50	97,5%	95%
	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,50	99%	98%
	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,23	5,13	90%	80%
3	9,55	9,28	9,12	9,01	8,98	8,78	8,53	95%	90%
	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,42	13,90	97,5%	95%
	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,23	26,12	99%	98%
	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,92	3,76	90%	80%
4	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	5,96	5,63	95%	90%
	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	8,84	8,26	97,5%	95%
	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,54	13,46	99%	98%
	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,30	3,10	90%	80%
5	5,79	4,76	5,19	5,05	4,95	4,74	4,36	95%	90%
	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,61	6,02	97,5%	95%
	13,27	12,06	11.39	10,97	10,67	10,05	9,02	99%	98%
	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	2,94	2,72	90%	80%
6	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,06	3,67	95%	90%
	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,46	4,85	97,5%	95%
	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	7,87	6,88	99%	98%
	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,32	2,06	90%	80%
10	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	2,97	2,54	95%	90%
	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,96	3,08	97,5%	95%
	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	4,85	3,91	99%	98%
	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,06	1,76	90%	80%
15	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,54	2,07	95%	90%
	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,06	2,40	97,5%	95%
	6,36	5,42	4,89	4,36	4,32	3,80	2,87	99%	98%
	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,60	**1,00**	90%	80%
∞ (2)	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,83	**1,00**	95%	90%
	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,05	**1,00**	97,5%	95%
	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,32	**1,00**	99%	98%

Σύγκριση διακυμάνσεων: Δοκιμασία F (Παράδειγμα)

Να εξεταστεί σε στάθμη εμπιστοσύνης 95% εάν υπάρχει σημαντική διαφορά στη διασπορά των αποτελεσμάτων που παρέχουν οι μέθοδοι Α και Β με βάση τις παρακάτω τιμές μετρήσεων:

Μέθ. Α: 4,41, 4,54, 4,89, 4,89, 5,12 Μέθ. Β: 4,52, 4,62, 4,68, 4,73



Η αναφερόμενη τιμή P αφορά δοκιμασία **ενός άκρου**, οπότε θα είναι (για δοκιμασία **δύο άκρων**)

P = 2 x 0,04280784 = **0,0856**

Ανάλυση Διακύμανσης
Analysis of Variance (ANOVA)

Σκοπός της ANOVA: Εντοπισμός των πηγών προέλευσης της διακύμανσης ομαδοποιημένων μετρήσεων και εκτίμηση της συνεισφοράς κάθε πηγής στην ολική διακύμανση

Στατιστική προσέγγιση: Εάν δεχτούμε ότι όλες οι μετρήσεις προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό, τότε η παρατηρούμενη διακύμανση μεταξύ των μέσω τιμών των επιμέρους ομάδων είναι η στατιστικώς αναμενόμενη με βάση τις διακυμάνσεις των μετρήσεων;

- Αν ΝΑΙ τότε όλες οι ομάδες προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό.
- Αν ΟΧΙ, τότε υπάρχει κάποιος παράγοντας που διαφοροποιεί τις μετρήσεις από ομάδα σε ομάδα **επαυξάνοντας** τη διακύμανση (παράγοντας που διαφοροποιεί τον "πληθυσμό" σε "πληθυσμούς").

Τυπικές περιπτώσεις εφαρμογής:

- Σύγκριση αναλυτικών αποτελεσμάτων πολλών εργαστηρίων, όταν όλα μετρούν το ίδιο συστατικό στο ίδιο δείγμα με την ίδια τεχνική (δηλ. επέκταση του t-test σε περισσότερες από δύο ομάδες) (interlaboratory precision).
- Διαπίστωση της ομοιογένειας δείγματος με αναλύσεις διαφορετικών επιμέρους δειγμάτων ληφθέντων από διάφορα σημεία του κυρίως δείγματος (sample homogeinity).
- Διαπίστωση της επίδρασης της σειράς μέτρησης στο αναλυτικό αποτέλεσμα (within day precision).
- Διαπίστωση της επίδρασης της ημέρας μέτρησης στο αναλυτικό αποτέλεσμα (between days precision).

Ανάλυση Διακύμανσης

Πηγές διακύμανσης:

1. **Τυχαία σφάλματα** (random errors). Υπεισέρχονται στο στάδιο μέτρησης και έχουν την ίδια επίδραση σε όλες τις ομάδες μετρήσεων.
2. **Ελεγχόμενοι παράγοντες** (controlled factors). Οι παράγοντες που καθορίζουν το σύστημα ομαδοποίησης των μετρήσεων. Διακρίνονται σε **αριθμήσιμους** και **μη αριθμήσιμους**.

   Παραδείγματα αριθμήσιμων παραγόντων: Θερμοκρασία συντήρησης δείγματος, βάθος δειγματοληψίας, σειρά ανάλυσης, συγκέντρωση ενός αναλυτικού αντιδραστηρίου.

   Παραδείγματα μη αριθμήσιμων παραγόντων: Εργαστήριο, ο αναλυτής, εταιρία παραγωγής κάποιου αναλυτικού αντιδραστηρίου.

Βασικοί τύποι ANOVA:

Μονόδρομη (one-way) **ANOVA**: Ένας ελεγχόμενος παράγοντας (π.χ. βάθος δειγματοληψίας)

Δίδρομη (two-way) **ANOVA** : Δύο ελεγχόμενοι παράγοντες (π.χ. βάθος δειγματοληψίας + θερμοκρασία συντήρησης δείγματος)

κ.ο.κ.

Ανάλυση Διακύμανσης: Συμβολισμοί – Μηδενική υπόθεση

	Ομάδα μέτρησης				
	1	2	..	..	m
Μέτρηση 1	x_{11}	x_{12}	..	..	x_{1m}
Μέτρηση 2	x_{21}	x_{22}	..	..	x_{2m}
..	..	..		..	..
..	..	..		..	..
..	..	..	..	..	..
Μέτρηση n_j	x_{nj1}	x_{nj2}	..	..	x_{njm}

$$H_o:\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_m$$

$$H_a:\ \mu_1 \neq \mu_2 = \mu_3 = \ldots\ \mu_m$$
$$\mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3 \neq \ldots\ \mu_m \ \text{ή (κ.λπ.)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \ldots\ \mu_m$$

Ανάλυση Διακύμανσης: Υπολογισμοί επιμέρους ποσοτήτων

ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΟΜΑΔΑ n_j ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ
($1 \le j \le m$)

1) Το **άθροισμα** (sum) των μετρήσεων:

$$A_j = \sum_{i=1}^{n_j} x_i$$

2) Η **μέση τιμή της ομάδας** (group average):

$$\bar{x}_j = A_j / n_j$$

3) Η **διακύμανση της ομάδας** (group variance):

$$v_j = s_j^2 = \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{x}_j - x_i)^2 / (n_j - 1)$$

4) Το **άθροισμα των τετραγώνων των υπολοίπων** (sum of squared residuals):

$$\sum_{i=1}^{n_j} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{x}_j - x_i)^2 = v_j (n_j - 1)$$

ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

1) Ο συνολικός αριθμός μετρήσεων:

$$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$$

2) Το **μεγάλο άθροισμα** (grand sum):

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_m$$

3) Η **μεγάλη μέση τιμή** (grand average):

$$\bar{\bar{x}} = A / N$$

4) Το **άθροισμα των τετραγώνων των υπολοίπων** (sum of squared residuals):

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n_{j1}} r_1^2 + \sum_{i=1}^{n_{j2}} r_2^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n_{jm}} r_m^2 = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n_k} r_i^2 \right)$$

5) Το **άθροισμα των ζυγισμένων τετραγώνων** (sum of weighted squares):

$$S_2 = n_1 (\bar{\bar{x}} - \bar{x}_1)^2 + n_2 (\bar{\bar{x}} - \bar{x}_2)^2 + \ldots + n_m (\bar{\bar{x}} - \bar{x}_m)^2 = \sum_{k=1}^{m} (\bar{\bar{x}} - \bar{x}_k)^2$$

6) Το **ολικό άθροισμα τετραγώνων** (total sum of squares)

$$S_T = S_1 + S_2$$

Ανάλυση Διακύμανσης: Πίνακας αποτελεσμάτων (Σύνοψη)

Συνοπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων ANOVA

Άθροισμα τετραγώνων	Βαθμοί ελευθερίας	Διακύμανση	Πηγή διακύμανσης - Ονοματολογία
S_1	$f_1 = N - m$	$V_1 = S_1 / f_1$	Ενδοδειγματική διακύμανση (within-sample variance)
S_2	$f_2 = m - 1$	$V_2 = S_2 / f_2$	Διαδειγματική διακύμανση (between-sample variance)
$S_T = S_1 + S_2$	$f_T = N - 1$	$V_T = S_T / f_T$	Ολική διακύμανση (total variance)

Ακολουθεί σύγκριση των διακυμάνσεων V_2 και V_1 με δοκιμασία F.

Εάν η V_2 δεν είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την V_1 η H_o ισχύει.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η δοκιμασία F πρέπει να είναι δοκιμασία “ενός άκρου”.

Ανάλυση Διακύμανσης: Πρακτικά συμπεράσματα

Η μηδενική υπόθεση ισχύει ($V_1 = V_2$)	Η μηδενική υπόθεση δεν ισχύει ($V_1 < V_2$)
Ο ελεγχόμενος παράγοντας δεν επιδρά στο αποτέλεσμα.	Ο ελεγχόμενος παράγοντας επιδρά στο αποτέλεσμα.
Όλες οι μετρήσεις προέρχονται από τον ίδιο (“ενιαίο”) πληθυσμό και οι διαφορές στις μέσες τιμές οφείλονται μόνο σε τυχαία σφάλματα στο στάδιο των μετρήσεων.	Όλες οι μετρήσεις δεν προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό και οι διαφορές στις μέσες τιμές οφείλονται στην επίδραση του **ελεγχόμενου παράγοντα**.
Όλες οι μετρήσεις μπορούν να συνενωθούν σε μία ενιαία ομάδα (ως προερχόμενες από τον ίδιο πληθυσμό).	Δεν επιτρέπεται η συνένωση των μετρήσεων σε μία ενιαία ομάδα, αλλά παραμένουν στις αρχικές ομάδες, μέχρις ότου διαπιστωθούν οι ομάδες που υπέστησαν την επίδραση του **ελεγχόμενου παράγοντα**, οπότε μπορεί να ακολουθήσει νέα ομαδοποίηση.
Η μεγάλη μέση τιμή ($\bar{\bar{x}}$) μπορεί να δοθεί ως τελικό (ενιαίο) αποτέλεσμα της ανάλυσης	Η μεγάλη μέση τιμή ($\bar{\bar{x}}$) δεν έχει καμία στατιστική σημασία, αφού προέρχεται από διαφορετικούς πληθυσμούς.
Η ολική διακύμανση V_T αποτελεί τη διακύμανση του δείγματος και εκτιμήτρια της διακύμανσης του πληθυσμού. Η τυπική απόκλιση είναι $s_T = V_T^{1/2}$.	Πρέπει να δοθούν ξεχωριστά οι τιμές V_1 (ενδοδειγματική διακύμανση) και η V_2 (διαδειγματική διακύμανση) και οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις $s_{T1} = V_1^{1/2}$ και $s_2 = V_2^{1/2}$.

Ανάλυση Διακύμανσης: Παράδειγμα

Σε δείγματα Α, Β, Γ και Δ θαλάσσιου ύδατος που ελήφθησαν στην ίδια τοποθεσία, αλλά σε βάθη 1, 5, 20 και 100 μέτρων προσδιορίσθηκε η περιεκτικότητα σε Br με την ίδια φωτομετρική μέθοδο και τα αποτελέσματα (σε mg Br/L) πολλαπλών μετρήσεων σε κάθε δείγμα δείχνονται στον πίνακα.

Να εξετασθεί αν σε στάθμη εμπιστοσύνης 95% το βάθος δειγματοληψίας (ελεγχόμενος παράγοντας) έχει επίδραση στην τιμή της συγκέντρωσης Br.

Δείγμα Α	Δείγμα Β	Δείγμα Γ	Δείγμα Δ
69,1	63,5	64,0	69,9
70,5	68,4	61,3	71,2
67,3	63,1	64,3	66,5
68,8	69,9	61,4	-
69,7	-	64,6	-
-	-	69,1	-
-	-	69,2	-

Λύση. Υπολογίζονται οι επιμέρους απαιτητές ποσότητες:

Ποσότητα	Δείγμα Α	Δείγμα Β	Δείγμα Γ	Δείγμα Δ
Άθροισμα	345,4	264,9	453,8	207,6
Μέση τιμή	69,1	66,2	64,8	69,2
Διακύμανση	1,4	11,8	10,4	5,9
Άθρ. τετρ. υπολ.	5,6	35,4	62,7	11,8

Επιπλέον υπολογίζονται:

Συνολικός αριθμός μετρήσεων: **19**, Μεγάλο άθροισμα: **1271,7**, Μεγάλη μέση τιμή: **66,9**, Άθρ. τετραγ. υπολοίπ. (S_1): **115,6**, Άθρ. ζυγισμ. τετραγ. (S_2): **71,47**, Ολικό άθρ. τετραγ.: **187,0**.

Ενδοδειγματική διακυμ. $V_1 = S_1 / (19 - 4) =$ **7,70**, Διαδειγματική διακύμ. $V_2 = S_2 / (4 - 1) =$ **23,82**,

Ολική διακύμ. $V_T = S_T / (19 - 1) =$ **10,39**, επομένως $F_{πειραμ.} = V_2 / V_1 =$ **3,093**, που είναι μικρότερη από την $F_{θεωρ}$ (v_B=15, v_A=3, CL=95%-ενός άκρου) = **3,29**, επομένως: **η H_o ισχύει.**

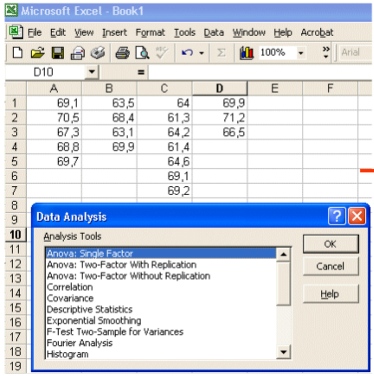
Επομένως το βάθος δειγματοληψίας δεν επιδρά και μπορούμε να αναφέρουμε ότι:
Μέση [Br^-] = **66,9 mg/L** και $s = \sqrt{10,39}$ = **3,2 mg/L**.

Ανάλυση Διακύμανσης: Παράδειγμα

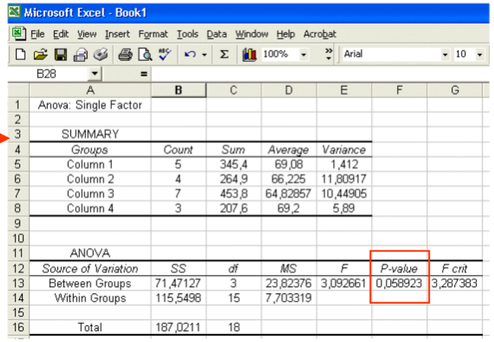
Σε δείγματα Α, Β, Γ και Δ θαλάσσιου ύδατος που ελήφθησαν στην ίδια τοποθεσία, αλλά σε βάθη 1, 5, 20 και 100 μέτρων προσδιορίσθηκε η περιεκτικότητα σε Br με την ίδια φωτομετρική μέθοδο και τα αποτελέσματα (σε mg Br/L) πολλαπλών μετρήσεων σε κάθε δείγμα δείχνονται στον πίνακα.

Να εξετασθεί αν σε στάθμη εμπιστοσύνης 95% το βάθος δειγματοληψίας (ελεγχόμενος παράγοντας) έχει επίδραση στην τιμή της συγκέντρωσης Br.

Δείγμα Α	Δείγμα Β	Δείγμα Γ	Δείγμα Δ
69,1	63,5	64,0	69,9
70,5	68,4	61,3	71,2
67,3	63,1	64,3	66,5
68,8	69,9	61,4	-
69,7	-	64,6	-
-	-	69,1	-
-	-	69,2	-



	A	B	C	D
1	69,1	63,5	64	69,9
2	70,5	68,4	61,3	71,2
3	67,3	63,1	64,2	66,5
4	68,8	69,9	61,4	
5	69,7		64,6	
6			69,1	
7			69,2	



Anova: Single Factor

SUMMARY

Groups	Count	Sum	Average	Variance
Column 1	5	345,4	69,08	1,412
Column 2	4	264,9	66,225	11,80917
Column 3	7	453,8	64,82857	10,44905
Column 4	3	207,6	69,2	5,89

ANOVA

Source of Variation	SS	df	MS	F	P-value	F crit
Between Groups	71,47127	3	23,82376	3,092661	0,058923	3,287383
Within Groups	115,5498	15	7,703319			
Total	187,0211	18				

Ανάλυση Διακύμανσης: Παράδειγμα

Το ίδιο παράδειγμα με διαφορετικά δεδομένα για τα δείγματα Α και Β:

Δείγμα Α	Δείγμα Β	Δείγμα Γ	Δείγμα Δ
62,1	63,7	64,0	69,9
64,3	62,4	61,3	71,2
62,1	64,1	64,3	66,5
65,8	63,2	61,4	-
61,7	-	64,6	-
-	-	69,1	-
-	-	69,2	-

Λύση:

Με αντίστοιχους υπολογισμούς όπως προηγουμένως προκύπτει:

$S_1 = 88{,}7$ $S_2 = 79{,}0$ $S_T = 167{,}0$

οπότε:

$V_1 = S_1 / (19 – 4) = 5{,}91$

$V_2 = S_2 / (4 – 1) = 26{,}33$

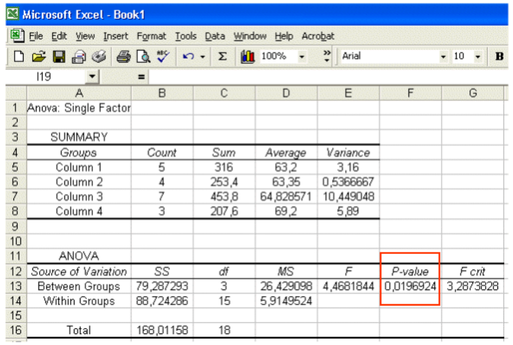
$V_T = S_T / (19 – 1) = 9{,}32$

και

$F_{πειραμ.} = V_2 / V_1 = 26{,}33 / 5{,}91 = 4{,}453$

Και επειδή $F_{πειραμ} > F_{θεωρ.}$ (=3,29)

Η H_o απορρίπτεται και επομένως **υπάρχει επίδραση** του βάθους στο αποτέλεσμα σε CL 95%.



Anova: Single Factor

SUMMARY

Groups	Count	Sum	Average	Variance
Column 1	5	316	63,2	3,16
Column 2	4	253,4	63,35	0,5366667
Column 3	7	453,8	64,828571	10,449048
Column 4	3	207,6	69,2	5,89

ANOVA

Source of Variation	SS	df	MS	F	P-value	F crit
Between Groups	79,287293	3	26,429098	4,4681844	0,0196924	3,2873828
Within Groups	88,724286	15	5,9149524			
Total	168,01158	18				

Ανάλυση Διακύμανσης: Παράδειγμα

Υπολογισμός του σημείου από το οποίο αρχίζει η διαφοροποίηση:

Δείγμα	Μέση τιμή	Διαφορά
Α	63,2	
		0,2
Β	63,4	
		1,4
Γ	64,8	
		4,4
Δ	69,2	

Λύση: Υπολογίζεται η ελάχιστη σημαντική διαφορά (least significant difference, lsd):

$$\boxed{lsd = s_1 \times (2 / f_1)^{1/2} \times t_{f1}}$$

Όπου s_1: η ενδοδειγματική τυπική απόκλιση (= $V_1^{1/2}$), f_1 και f_2 οι **ενδοδειγματικοί** και **διαδειγματικοί** βαθμοί ελευθερίας (f_1 = N – m, f_2 = m – 1) και t_{f1} η θεωρητική τιμή t για f_1 βαθμούς ελευθερίας στο προκαθορισμένο CL (εδώ για CL 95% και f_1 = 15) είναι $t_{θεωρ}$ = 2,13.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι:

$lsd = (2{,}43) \times (2 / 3)^{1/2} \times 2{,}13 = \mathbf{4{,}23}$

Επομένως η διαφοροποίηση ξεκινάει μεταξύ δείγματος Γ και δείγματος Δ (μεταξύ βάθους 20 και 100 m).