Κβαντική Οπτική και Lasers.

Κωνσταντίνος Σιμσερίδης

Ενότητα 4η Κβαντική αντιμετώπιση της αλληλεπιδράσεως ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας - ύλης (κυρίως δισταθμικού ατόμου). Κβάντωση ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Άσκηση 4.1.

Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Rabi ενός ΗΜ τρόπου

$$\hat{H}_R = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g\hat{S}_+\hat{a}^\dagger + \hbar g\hat{S}_+\hat{a} + \hbar g\hat{S}_-\hat{a}^\dagger + \hbar g\hat{S}_-\hat{a}\,.$$

1. Εξηγήστε όλα τα σύμβολα που περιέχει και τι περιγράφει κάθε ένας από τους έξι προσθετέους.
2. Ποιούς δύο από αυτούς τους έξι προσθετέους αγνοούμε στη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings και για ποιό λόγο;
3. Θεωρήστε τώρα τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings ενός ΗΜ τρόπου. Να υπολογιστούν τα $\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$, $\langle\hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle$, $\langle\hat{S}_+\hat{S}_-\rangle$, $\langle\hat{S}_-\hat{S}_+\rangle$, $<\hat{S}_+\hat{a}>$, $<\hat{S}_+\hat{a}^\dagger>$, $<\hat{S}_-\hat{a}^\dagger>$, $<\hat{S}_-\hat{a}>$ για την κατάσταση: $|\psi_E(t)> = c_1(t)\,|\downarrow, n+1> + c_2(t)\,|\uparrow, n>$

Θεωρήστε τώρα αρχικές συνθήκες $c_1(0)=0$, $c_2(0)=1$.

4. Αποδείξτε ότι οι συντελεστές $c_1(t)$ και $c_2(t)$ ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:
$$i\begin{pmatrix}\dot{c_1}\\ \dot{c_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(n+1)\omega & g\sqrt{n+1}\\ g\sqrt{n+1} & \Omega+n\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

Ας ορίσουμε τη «γενικευμένη συχνότητα Rabi» $\Omega_{n+1} = [\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2 + g^2(n+1)]^{1/2}$. Αποδεικνύεται ότι

$$|c_1(t)|^2 = \frac{(n+1)g^2}{\Omega_{n+1}^2}\sin^2(\Omega_{n+1}t)\,.$$

5. Να αποδώσετε γραφικά τη χρονική εξέλιξη της «αναμενόμενης» ή «μέσης» τιμής του αριθμού των φωτονίων στην κοιλότητα.
6. Να αποδώσετε γραφικά τη χρονική εξέλιξη της «αναμενόμενης» ή «μέσης» τιμής του αριθμού των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη του δισταθμικού συστήματος.
7. Δείξτε ότι η συχνότητα Rabi καθορίζει (I) το πλάτος και (II) το χρόνο μεταξύ διαδοχικών μεγίστων ή ελαχίστων στις «ταλαντώσεις Rabi».

Άσκηση 4.2.

(α΄) Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Rabi ενός ΗΜ τρόπου. Ποιούς όρους της αγνοούμε ώστε να καταλήξουμε στη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings και για ποιό λόγο;

(β΄) Θεωρήστε τώρα τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings ενός ΗΜ τρόπου. Υπολογίστε τα $\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$, $\langle\hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle$, $\langle\hat{S}_+\hat{S}_-\rangle$, $\langle\hat{S}_-\hat{S}_+\rangle$, $<\hat{S}_+\hat{a}>$, $<\hat{S}_+\hat{a}^\dagger>$, $<\hat{S}_-\hat{a}^\dagger>$, $<\hat{S}_-\hat{a}>$ για την κατάσταση:

$$\left|\psi(t)> = \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\right|\downarrow,1> + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\,|\uparrow,0>$$

(γ΄) Χρησιμοποιώντας τη χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schrödinger για την παραπάνω κατάσταση, δείξτε ότι ικανοποιείται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix}-\Omega\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\\ \Omega\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega & g\\ g & \Omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\\ \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

(δ΄) Ορίζοντας $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\\ \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ και δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής $\vec{x}(t) = \vec{v}e^{-i\lambda t}$, δείξτε ότι

$$\lambda = \frac{\omega+\Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2 + g^2}$$

Άσκηση 4.3.
Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings

$\hat{H}_{JC}^{m} = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^m(\hat{S}_+\hat{a}_m + \hat{S}_-\hat{a}_m^\dagger)$

1. Εξηγήστε όλα τα σύμβολα που περιέχει.
2. Να υπολογιστούν τα $< \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m >$, $< \hat{S}_+\hat{S}_- >$, $< \hat{S}_+\hat{a}_m >$, $<\hat{S}_-\hat{a}_m^\dagger>$ για την κατάσταση:
   $|\psi_A(t) > = c_1(t) \mid \downarrow, n > + c_2(t) \mid \uparrow, n-1 >$

Θεωρήστε τώρα αρχικές συνθήκες $c_1(0)=1$, $c_2(0)=0$.

3. Αποδείξτε ότι οι συντελεστές $c_1(t)$ και $c_2(t)$ ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:
   $i\begin{pmatrix} \dot{c_1} \\ \dot{c_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\omega_m & g^m\sqrt{n} \\ g^m\sqrt{n} & \Omega + (n-1)\omega_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Ορίζουμε τη «γενικευμένη συχνότητα Rabi» $\Omega_n = \left[\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2 + g^2 n\right]^{1/2}$, όπου για απλότητα θέσαμε τη «συχνότητα Rabi» $g^m = g$ καθώς και $\omega_m = \omega$. Περαιτέρω αποδεικνύεται ότι $|c_2(t)|^2 = \frac{ng^2}{\Omega_n^2}\sin^2(\Omega_n t)$.

4. Να αποδώσετε γραφικά τη χρονική εξέλιξη της «αναμενόμενης» ή «μέσης» τιμής του αριθμού των φωτονίων στην κοιλότητα.
5. Να αποδώσετε γραφικά τη χρονική εξέλιξη της «αναμενόμενης» ή «μέσης» τιμής του αριθμού των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη του δισταθμικού συστήματος.
6. Δείξτε ότι η συχνότητα Rabi καθορίζει (I) το πλάτος και (II) το χρόνο μεταξύ διαδοχικών μεγίστων ή ελαχίστων των «ταλαντώσεων Rabi».

Άσκηση 4.4.
Αναβίβαση και καταβίβαση ηλεκτρονίου μεταξύ των ενεργειακών σταθμών διστα θμικού ατόμου.

(α΄) Ορίστε τους σπίνορες που περιγράφουν το ηλεκτρόνιο σε κάθε μία από τις δύο στάθμες του ατόμου καθώς και στο κενό, σε μορφή πινάκων στήλης.
(β΄) Ορίστε τους τελεστές αναβιβάσεως και καταβιβάσεως ηλεκτρονίων, $\hat{S}_+$ και $\hat{S}_-$, σε μορφή πινάκων. Δείξτε τι αποτέλεσμα έχει η δράση τους στους σπίνορες.
(γ΄) Βρείτε τα $\hat{S}_+ + \hat{S}_-$ καθώς και $\hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_+$.
(δ΄) Αποδείξτε ότι εν τέλει
$\hat{H}_{ατόμου} = E_2\, \hat{S}_+\hat{S}_- + E_1\, \hat{S}_-\hat{S}_+$
και επιπλέον δείξτε πως προκύπτει
$\hat{H}_{ατόμου} = \hbar\Omega\, \hat{S}_+\hat{S}_-$
εξηγώντας όλα τα σύμβολα.

Άσκηση 4.5.
Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Rabi

$\hat{H}_R^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^m(\hat{S}_+\hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_+\hat{a}_m + \hat{S}_-\hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_-\hat{a}_m)$.

1. Εξηγήστε όλα τα σύμβολα που περιέχει και συνοπτικά τι περιγράφει κάθε προσθετέος.
2. Στον τελευταίο προσθετέο $\hbar g^m(\hat{S}_+\hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_+\hat{a}_m + \hat{S}_-\hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_-\hat{a}_m)$ υπάρχουν 4 «υποπροσθετέοι». Εξηγήστε ποια διαδικασία περιγράφει ο καθένας από αυτούς και με ποια δικαιολογία αγνοούμε 2 από τους 4 υποπροσθετέους στη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings.
3. Ισχύει η ίδια δικαιολογία όταν έχουμε πολλούς τρόπους m;
4. Βρείτε τι κάνουν οι όροι $\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m$, $\hat{S}_+\hat{S}_-$, $\hat{S}_+\hat{a}_m^\dagger$, $\hat{S}_+\hat{a}_m$, $\hat{S}_-\hat{a}_m^\dagger$, $\hat{S}_-\hat{a}_m$, αλλά και ο $\hat{S}_-\hat{S}_+$ στην κατάσταση $|\downarrow, n_m >$.
5. Να υπολογιστούν οι $< \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m >$, $< \hat{S}_+\hat{S}_- >$, $< \hat{S}_+\hat{a}_m^\dagger >$, $< \hat{S}_+\hat{a}_m >$, $< \hat{S}_-\hat{a}_m^\dagger >$, $< \hat{S}_-\hat{a}_m>$ αλλά και η $< \hat{S}_-\hat{S}_+ >$ στην κατάσταση $|\downarrow, n_m >$.

Άσκηση 4.6.
Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings

$$\hat{H}_{JC}^{m} = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger)$$

1. Εξηγήστε όλα τα σύμβολα που περιέχει.
2. Να υπολογιστούν τα $< \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m >$, $< \hat{S}_+ \hat{S}_- >$, $< \hat{S}_+ \hat{a}_m >$, $<\hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger>$ για την κατάσταση:
$|\psi_E(t) > = c_1(t) \mid \downarrow, n+1 > + c_2(t) \mid \uparrow, n >$

Θεωρήστε τώρα αρχικές συνθήκες $c_1(0)=0$, $c_2(0)=1$.

3. Αποδείξτε ότι οι συντελεστές $c_1(t)$ και $c_2(t)$ ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:
$$i\begin{pmatrix} \dot{c_1} \\ \dot{c_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1)\omega_m & g^m\sqrt{n+1} \\ g^m\sqrt{n+1} & \Omega + n\omega_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε τη «γενικευμένη συχνότητα Rabi» $\Omega_{n+1} = [\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2 + g^2(n+1)]^{1/2}$, όπου για απλότητα θέσαμε τη «συχνότητα Rabi» $g^m = g$. Περαιτέρω αποδεικνύεται ότι $|c_1(t)|^2 = \frac{(n+1)g^2}{\Omega_{n+1}^2} \sin^2(\Omega_{n+1} t)$.

4. Να αποδώσετε γραφικά τη χρονική εξέλιξη της «αναμενόμενης» ή «μέσης» τιμής του αριθμού των φωτονίων στην κοιλότητα.
5. Να αποδώσετε γραφικά τη χρονική εξέλιξη της «αναμενόμενης» ή «μέσης» τιμής του αριθμού των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη του δισταθμικού συστήματος.
6. Δείξτε ότι η συχνότητα Rabi καθορίζει (I) το πλάτος και (II) το χρόνο μεταξύ διαδοχικών μεγίστων ή ελαχίστων στις «ταλαντώσεις Rabi».