

Κβαντική Οπτική και Lasers.

Κωνσταντίνος Σιμσερίδης

Ενότητα 1^η Εισαγωγή στη κβαντική φύση του φωτός

Άσκηση 1.1.

- (α') Να εξεταστεί η συμπεριφορά του νόμου Planck για την ακτινοβολία μέλανος σώματος στα εξής όρια: μηδενική συχνότητα και άπειρη συχνότητα.
(β') Να αποδειχθεί ότι στις πολύ μικρές συχνότητες ταυτίζεται με το νόμο Rayleigh-Jeans, ενώ στις πολύ μεγάλες συχνότητες ταυτίζεται με το νόμο Wien.

Άσκηση 1.2.

Πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας, μέλανος σώματος σε θερμική ισορροπία, $\rho(\nu, T)d\nu$. Δίνεται η τελική έκφραση του νόμου του Planck:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

1. Τι είναι «μέλαν σώμα»; Ποιες είναι οι μονάδες μετρήσεως της $\rho(\nu, T)$ στο Διεθνές Σύστημα;
2. Σε τι διαφέρουν στην τελική μαθηματική έκφραση οι νόμοι Planck, Rayleigh-Jeans, Wien;
3. Τι είναι η «υπεριώδης καταστροφή» και το «πρόβλημα μακρινού υπέρυθρου»;
4. Αποδείξτε το νόμο Stefan-Boltzmann στη μορφή $u(T) = aT^4$ όπου u είναι η πυκνότητα ενέργειας που μετριέται στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων σε J/m^3 . Με τι ισούται η σταθερά a ;
5. Θεωρώντας δεδομένο ότι η ροή φωτονίων είναι $\Phi = (N/4)c$, όπου N η πυκνότητα φωτονίων, αποδείξτε ότι $I = (c/4)u$. I είναι η εκπεμπόμενη ισχύς ανά μονάδα επιφανείας.
6. Αποδείξτε το νόμο Stefan-Boltzmann στη μορφή $I = \sigma T^4$. Με τι ισούται η σταθερά σ ;

Θεωρήστε δεδομένο ότι $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$.

Άσκηση 1.3.

Συμβατικά, στην περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος *μακρινό υπέρυθρο* (far infrared, FIR) έχουμε μήκος κύματος $25 \mu\text{m} < \lambda < 1000 \mu\text{m}$, ενώ στην περιοχή *υπεριώδες* (ultraviolet, UV) έχουμε μήκη κύματος $10 \text{nm} < \lambda < 400 \text{nm}$. Βρείτε σε τι $x = \frac{h\nu}{k_B T}$ αντιστοιχεί το FIR και σε τι x αντιστοιχεί το UV για θερμοκρασία: (α') 300 K δηλαδή περίπου για τη θερμοκρασία ενός ζώου, (β') 6000 K δηλαδή περίπου για την ενεργό θερμοκρασία της φωτόσφαιρας του Ηλίου, (γ') 6 K.

Άσκηση 1.4.

Αποδείξτε ότι $\rho_W(\nu, T) \neq \rho_{RJ}(\nu, T)$ για μικρές και μεγάλες συχνότητες (δηλαδή για μικρά και μεγάλα $x = \frac{h\nu}{k_B T}$). $\rho_W(\nu, T)$ είναι η έκφραση Wien και $\rho_{RJ}(\nu, T)$ η έκφραση Rayleigh-Jeans.

Άσκηση 1.5.

Για θερμοκρασία (α') 300 K, (β') 6000 K και (γ') 6 K: Υπολογίστε το μήκος κύματος λ_Δ στο οποίο η πρόβλεψη του νόμου Rayleigh-Jeans ρ_{RJ} είναι διπλάσια από την πειραματική τιμή ρ την οποία εξηγεί ο νόμος Planck. Σε ποια περιοχή του ΗΜ φάσματος ανήκει το λ_Δ κάθε φορά;