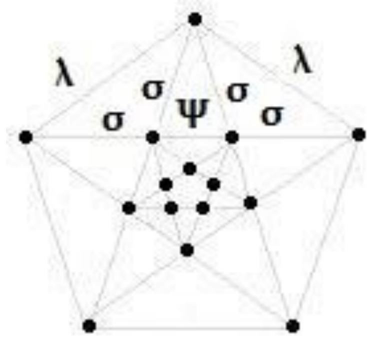
## Ασκήσεις Κεφαλαίου 1.

**Άσκηση 1.1** Χωρίζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε τέσσερα ίσα μέρη, μετά εξαιρούμε το δεύτερο και το τέταρτο, ενώ συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία επ' άπειρον στα ευθύγραμμα τμήματα που δημιουργούνται κάθε φορά. Ποιός είναι ο παράγων κλιμακώσεως και ποια η κατά Hausdorff διάσταση; Είναι η δομή μορφόκλασμα;

**Άσκηση 1.2** Σε ένα κανονικό πεντάγωνο φέρουμε τις διαγωνίους, οπότε σχηματίζεται εσωτερικά ένα μικρότερο αντεστραμμένο κανονικό πεντάγωνο. ***Για να πάρουμε κανονικό πεντάγωνο ιδίου προσανατολισμού με το αρχικό, εφαρμόζουμε τη διαδικασία ακόμα μια φορά.*** Αυτό μπορεί να συνεχιστεί επί άπειρον. Το κέντρο του σχήματος Κ μπορεί να θεωρηθεί, με άπειρη επανάληψη της διαδικασίας, ως πλεγματικό σημείο. Σε κάθε κορυφή των πενταγώνων, δηλαδή σε κάθε πλεγματικό σημείο, ακριβώς πάνω στο πλεγματικό σημείο, ας βάλουμε από ένα «κυκλικό» δομικό λίθο. ***Για τη συνολική διαδικασία με την οποία δημιουργείται πεντάγωνο ιδίου προσανατολισμού με το αρχικό:***




**(α΄)** Αποδείξτε ότι $\lambda / \sigma = \varphi$ αλλά και $\chi / \lambda = \varphi$ όπου $\chi = \sigma + \psi + \sigma$ . Η χρυσή τομή $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{5}$ . Ακόμα κι αν δεν μπορέσετε να αποδείξετε το (α΄), θεωρήστε το γνωστό για τα επόμενα ερωτήματα:

**(β΄)** Βρείτε τον παράγοντα κλιμακώσεως $s$ .

**(γ΄)** Βρείτε το λόγο του εμβαδού του αρχικού πενταγώνου προς το εμβαδό του επομένου πενταγώνου.

**(δ΄)** Βρείτε την κατά Hausdorff διάσταση $d$. Είναι η δομή αυτή μορφόκλασμα (fractal);

**(ε΄)** Είναι η δομή αυτή αυτο-όμοια;

**(ς΄)** Τι είδους συμμετρίες έχει κάθε μέλος της σειράς;

Δίνεται ο νόμος των ημιτόνων $\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$ και ο νόμος των συνημιτόνων $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$.

**Άσκηση 1.3** Ποια συμμετρία υπάρχει στους περιοδικούς κρυστάλλους αλλά όχι στους οιονεί κρυστάλλους; Επιπλέον, ποιες συμμετρίες περιστροφής απαγορεύονται στους περιοδικούς κρυστάλλους αλλά μπορεί να υπάρχουν τοπικά στους οιονεί κρυστάλλους; Υπάρχει τάξη στα άμορφα υλικά;

**Άσκηση 1.4** Χωρίζουμε ένα αρχικό ευθύγραμμο τμήμα σε δύο ίσα μέρη. Στη συνέχεια χωρίζουμε το κάθε ένα από τα δύο ίσα μέρη σε δύο άνισα τμήματα, ένα μικρότερο μήκους $\mu$, και ένα μεγαλύτερο μήκους $M$, έτσι ώστε ο χωρισμός αυτός να υπακούει στη χρυσή τομή, $\varphi$. Στη συνέχεια εξαιρούμε τα δύο μικρότερα τμήματα μήκους $\mu$. Σχεδιάστε το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα και το ότι απομένει μετά από την εφαρμογή της διαδικασίας δύο φορές. Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία επ' άπειρον στα ευθύγραμμα τμήματα που δημιουργούνται κάθε φορά. Ποιός είναι ο παράγων κλιμακώσεως (scaling factor) και ποια η κατά Hausdorff διάσταση; Είναι η δομή fractal (μορφόκλασμα);

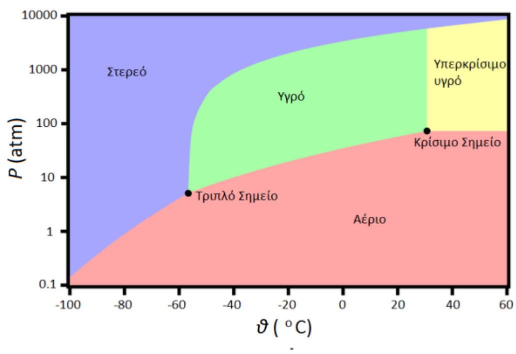
**Άσκηση 1.5**

**1.** Πως ονομάζονται οι μετατροπές καταστάσεως (ή «φάσεως»): στερεό → υγρό, υγρό → στερεό, υγρό → αέριο, αέριο → υγρό, στερεό → αέριο, αέριο → στερεό, αέριο → πλάσμα, πλάσμα → αέριο;

**2.** Ζωγραφίστε ένα τυπικό διάγραμμα φάσεως στερεού-υγρού-αερίου. Σημειώστε το *κανονικό* σημείο τήξεως με Α, το *κανονικό* σημείο βρασμού ή εξατμίσεως με Β, το τριπλό σημείο με Γ, τη γραμμή εξαχνώσεως - εναποθέσεως, τη γραμμή τήξεως - πήξεως και τη γραμμή εξατμίσεως - συμπυκνώσεως.

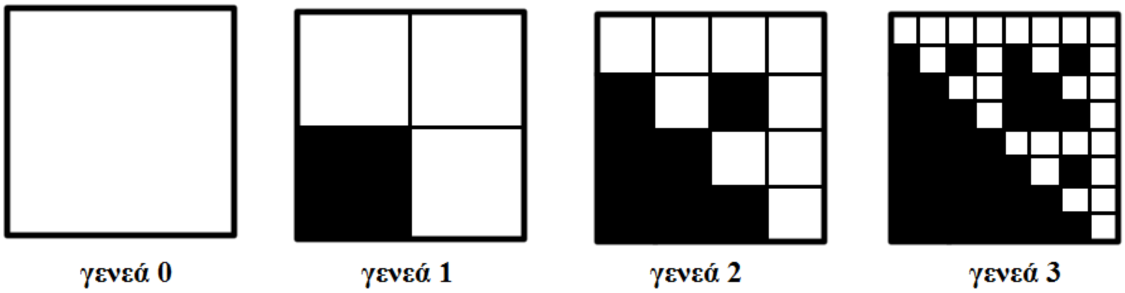
**3.** Το τριπλό σημείο Γ του $H_2O$ είναι σε $T$ = 273.16 K και $P$ = 0.6117 kPa. 1 atm = 101.325 kPa. Πως μπορούμε φτάσουμε στο τριπλό σημείο του $H_2O$ πειραματικά;

**4.** Εικόνα Δίπλα: Πρόχειρο διάγραμμα φάσεως του $CO_2$. Σε τι φάση βρίσκεται αυτό σε πίεση 2 atm και θερμοκρασία 293.15 K; Έχει το $CO_2$ κανονικό σημείο τήξεως ή κανονικό σημείο βρασμού; Τι είδους αλλαγή φάσεως παθαίνει το $CO_2$ σε 1 atm και σε ποια περίπου θερμοκρασία γίνεται αυτό;




**Άσκηση 1.6**

Χωρίζουμε ένα τετράγωνο σε 4 ίσα μέρη και εξαιρούμε το κάτω αριστερά. Σε κάθε ένα από τα τετράγωνα που απομένουν κάνουμε το ίδιο και συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία επί άπειρον...




**(α΄)** Βρείτε τον παράγοντα κλιμακώσεως $s$ .

**(β΄)** Βρείτε την κατά Hausdorff διάσταση *d*. Είναι η δομή αυτή μορφόκλασμα (fractal);

**(γ΄)** Βρείτε το λόγο του μαύρου εμβαδού προς το άσπρο εμβαδό συναρτήσει της γενεάς *i*.

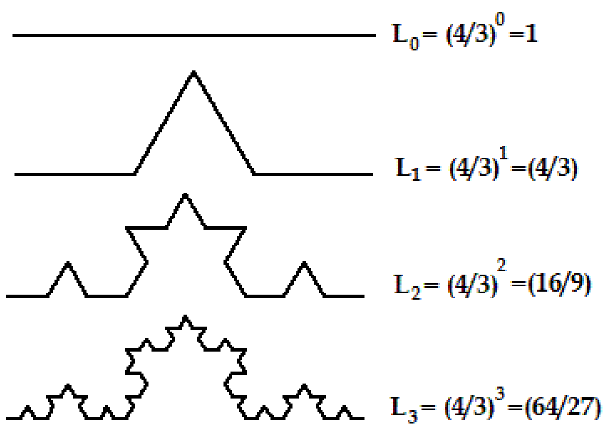
Θεωρήστε την ακολουθία που δημιουργείται από δύο μονοδιάστατες κυψελίδες: ένα μακρύτερο (L, long) ευθύγραμμο τμήμα και ένα κοντύτερο (S, short) ευθύγραμμο τμήμα, με κανόνα διογκώσεως (φουσκώματος, αυξήσεως, inflation rule) L→LS, S→SL και αρχικό όρο της ακολουθίας SL.

**(δ΄)** Είναι η δομή αυτή περιοδικός ή οιονεί κρύσταλλος; Γιατί;

**(ε΄)** Έχει συμμετρία αντιστροφής ως προς το κέντρο της;

**Άσκηση 1.7**

Ξεκινώντας από ένα ευθύγραμμο τμήμα το χωρίζουμε σε τρία ίσα μέρη. Μετά, με βάση το μεσαίο φτιάχνουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο αλλά μετά σβήνουμε τη βάση του (Εικόνα) και συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία επ' άπειρον. . .
Αυτή η κατασκευή ονομάζεται καμπύλη Koch. Βρείτε τον παράγοντα κλιμακώσεως *s* και την κατά Hausdorff διάσταση *d*. Είναι η δομή αυτή μορφόκλασμα; Αποδείξτε ότι το μήκος της είναι $L_i = (4/3)^i$ όπου $i$ η γενεά.



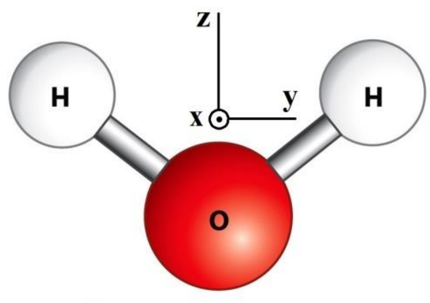

## Ασκήσεις Κεφαλαίου 2.

**Άσκηση 2.1** Εκφράστε την ανάκλαση στο επίπεδο xy $\sigma_{xy}$ και την περιστροφή κατά 180$^o$ γύρω από τον άξονα z σε μορφή πινάκων 3 x 3. Μετατίθενται οι πράξεις αυτές; Υπάρχει κάποια απλή πράξη που ισούται με το γινόμενο αυτό;

**Άσκηση 2.2** Για το τριγωνικό διδιάστατο πλέγμα Bravais: **(α΄)** Ορίστε ένα ζεύγος θεμελιωδών ανυσμάτων μετατοπίσεως {$\mathbf{a}_1$,$\mathbf{a}_2$} κάνοντας και το σχετικό σχήμα. Πόση είναι η μεταξύ των $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ γωνία; Είναι τα μέτρα τους ίσα; Εκφράστε τα $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$ συναρτήσει των μοναδιαίων ανυσμάτων των αξόνων x και y, **i** και **j**, αντιστοίχως. **(β΄)** Ζωγραφίστε τη θεμελιώδη κυψελίδα και υπολογίστε το εμβαδό της $S^{\Theta K}$. **(γ΄)** Είναι αυτό το ζεύγος θεμελιωδών διανυσμάτων μετατοπίσεως που ορίσατε {$\mathbf{a}_1$,$\mathbf{a}_2$} μοναδικό; Μπορείτε να υποδείξετε και κάποιο άλλο ζεύγος θεμελιωδών διανυσμάτων μετατοπίσεως {$\mathbf{a}_1'$,$\mathbf{a}_2'$}; **(δ΄)** Ορίστε τη θεμελιώδη κυψελίδα Wigner-Seitz και αποδείξτε ότι το εμβαδό της $S_{WS}^{\Theta K}$ είναι ίσο με $S^{\Theta K}$. **(ε΄)** Θεωρείστε κάποιο πλεγματικό σημείο. Βρείτε τον αριθμό των πρώτων, δευτέρων και τρίτων γειτόνων του, καθώς και τις αποστάσεις τους από το εν λόγω πλεγματικό σημείο.

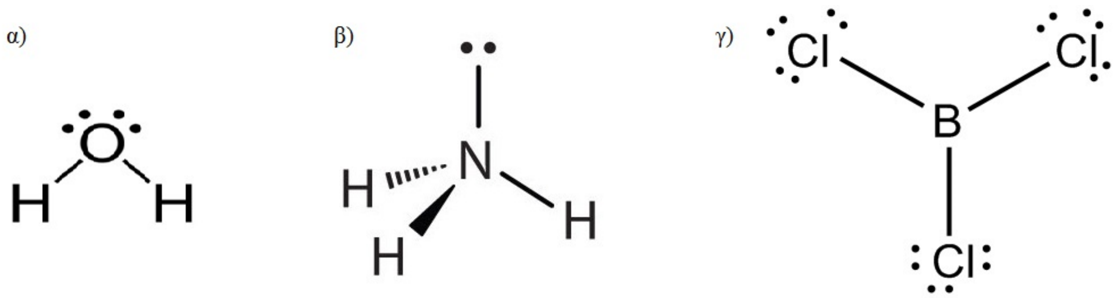
**Άσκηση 2.3** Για το διδιάστατο ορθογωνικό πλέγμα Bravais:
**(α΄)** Εκφράστε τα θεμελιώδη ανύσματα μετατοπίσεως συναρτήσει των μοναδιαίων ανυσμάτων $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ καταλλήλου καρτεσιανού συστήματος αναφοράς και υπολογίστε το εμβαδόν της θεμελιώδους κυψελίδας, η οποία ορίζεται με τα θεμελιώδη ανύσματα μετατοπίσεως.
**(β΄)** Ορίστε τη θεμελιώδη κυψελίδα Wigner-Seitz.
**(γ΄)** Αποδείξτε ότι το εμβαδό της θεμελιώδους κυψελίδας Wigner-Seitz είναι ίσο με το εμβαδό της θεμελιώδους κυψελίδας που ορίζεται με τα θεμελιώδη ανύσματα μετατοπίσεως.

**Άσκηση 2.4**
Στο σχήμα φαίνεται το μόριο του νερού το οποίο κείται στο επίπεδο yz, ενώ ο άξονας z διχοτομεί τη γωνία HOH. Δίνεται ακόμη ότι η ομάδα συμμετρίας του μορίου είναι η $C_{2v}$ η οποία έχει 4 πράξεις συμμετρίας. Μία από αυτές είναι η ταυτοτική Ε. Μία άλλη είναι περιστροφή και οι υπόλοιπες δύο ανακλάσεις σε επίπεδο.




**(α΄)** Προσδιορίστε τις 3 αυτές άγνωστες πράξεις συμμετρίας.
**(β΄)** Φτιάξτε τον πίνακα πολλαπλασιασμού της $C_{2v}$.
**(γ΄)** Δείξτε ότι η ομάδα $C_{2v}$ είναι αβελιανή δηλαδή ότι ισχύει η μεταθετική ιδιότητα.
**(δ΄)** Σε μία διάσταση υπάρχει ένα μόνο πλέγμα Bravais. Προσδιορίστε την ομάδα συμμετρίας του, δηλαδή βρείτε από ποιες πράξεις συμμετρίας αποτελείται.

**Άσκηση 2.5** Πόσα είναι τα επίπεδα ανακλάσεως στα μόρια $H_2O$, $NH_3$ και $BCl_3$; Οι γεωμετρίες δίνονται στην επόμενη εικόνα.




**Άσκηση 2.6** Σχεδιάστε για όλα τα ορθορομβικά πλέγματα Bravais (απλό, βασηκεντρωμένο, χωροκεντρωμένο, εδροκεντρωμένο) τη συμβατική μοναδιαία κυψελίδα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Βρείτε σε κάθε περίπτωση μια τριάδα θεμελιωδών ανυσμάτων μετατοπίσεως και εκφράστε τα συναρτήσει καταλλήλου καρτεσιανού συστήματος αναφοράς. Υπολογίστε σε κάθε περίπτωση τον όγκο της θεμελιώδους κυψελίδας και ελέγξτε αν είναι ο αναμενόμενος με βάση τον αριθμό των πλεγματικών σημείων που υπάρχουν στη συμβατική μοναδιαία κυψελίδα όγκου $V^{\Sigma M K} = abc$.

**Άσκηση 2.7** Ως γνωστόν, στο ορθορομβικό κρυσταλλικό σύστημα η συμβατική μοναδιαία κυψελίδα έχει όλες τις ακμές άνισες ($a \neq b \neq c \neq a$) και όλες τις γωνίες της ορθές ($\alpha = \beta = \gamma = 90^o$). Εστιάστε στο βασηκεντρωμένο ορθορομβικό πλέγμα Bravais. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει βασηκεντρωμένο κυβικό πλέγμα Bravais επειδή εάν σε ένα βασηκεντρωμένο ορθορομβικό πλέγμα Bravais θέσουμε όλες τις ακμές ίσες ($a = b = c$) προκύπτει απλό τετραγωνικό πλέγμα.

## Ασκήσεις Κεφαλαίου 4.

**Άσκηση 4.1**

Θεωρήστε την καταστατική εξίσωση van der Waals $\left(\mathrm{p} + \mathrm{a}\frac{\mathrm{n}^2}{\mathrm{V}^2}\right)(\mathrm{V} - \mathrm{nb}) = \mathrm{nRT}$ και απλοποιήστε την θεωρώντας ότι $\mathrm{a} \to 0$. Δηλαδή οι δομικοί λίθοι είναι σκληρές σφαίρες που με αυτό τον τρόπο απωθούνται, αλλά δεν έλκονται μεταξύ τους. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις:

1. p(V) και V(p) όπου θα ορίσετε τα πεδία ορισμού και τα πεδία «φυσικού ενδιαφέροντος».

Να υπολογιστούν:

2. Η συμπιεστότητα $\kappa := -\frac{1}{\mathrm{V}}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{p}}\right)_{\mathrm{T}}$, αφού εξηγήσετε τι σημαίνει ο ορισμός.
3. Ο συντελεστής κυβικής διαστολής $\alpha := \frac{1}{\mathrm{V}}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{T}}\right)_{\mathrm{p}}$, αφού εξηγήσετε τι σημαίνει ο ορισμός.
4. Συγκρίνετε την συμπιεστότητα που βρήκατε κ με αυτή του ιδανικού αερίου $\kappa_{\iota\delta}$.
5. Συγκρίνετε το συντελεστή κυβικής διαστολής που βρήκατε α με αυτόν του ιδανικού αερίου $\alpha_{\iota\delta}$.

**Άσκηση 4.2**

**(α΄)** Δίνεται η καταστατική εξίσωση van der Waals (vdW) $p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2}$ , όπου $a, b > 0$. Ποιό είναι το πεδίο ορισμού $\mathcal{A}$ και ποιό το πεδίο "φυσικού ενδιαφέροντος" $\mathcal{T}$ της συναρτήσεως $p(V_m)$;

Τι θα πρέπει να ισχύει ώστε είναι $p > 0,\ \forall\, V_m \in \mathcal{T}$ ;

**(β΄)** Περιγράψτε ποιοτικά, με ένα απλό σχήμα, μια πειραματική ισόθερμη $p(V_m)$ που να περιλαμβάνει μετατροπή φάσεως αερίου-υγρού. Σε τι διαφέρει ποιοτικά από την ισόθερμη vdW; Τι είναι η πίεση κορεσμένων ατμών;

**(γ΄)** Θεωρήστε μια πειραματική ισόθερμη που να περιλαμβάνει μετατροπή φάσεως αερίου - υγρού. Αποδείξτε ότι η θερμότητα εξατμίσεως είναι θετική.

**(δ΄)** Τι είναι η λανθάνουσα θερμότητα και γιατί ονομάζεται έτσι;

**(ε΄)** Θεωρήστε πειραματικές ισόθερμες που περιλαμβάνουν μετατροπή φάσεως αερίου - υγρού. Αποδείξτε ότι, κατά τις μετατροπές φάσεως, αυξάνοντας τη θερμοκρασία, η πυκνότητα του υγρού μικραίνει ενώ του αερίου μεγαλώνει.

**Άσκηση 4.3** Δίνεται η Κ.Ε. (1η Εξίσωση Dieterici) $P(V_m - b) = RTe^{-\frac{a}{RTV_m}}$, όπου $a$, $b$ θετικές σταθερές. Υπολογίστε τις κρίσιμες παραμέτρους $T_K$, $V_{mK}$, $P_K$ της καταστατικής αυτής εξισώσεως.

**Άσκηση 4.4**

**(α΄)** Μπορούμε να ορίσουμε την συμπιεστότητα ως $\kappa := -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ και τον συντελεστή κυβικής διαστολής ως $\alpha := \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ . Εξηγήσετε τι σημαίνουν οι ορισμοί. Τι σημασία έχει το πλήν (–); Γιατί στους ορισμούς διαιρούμε με τον όγκο;

**(β΄)** Υπολογίστε την συμπιεστότητα και τον συντελεστή κυβικής διαστολής για το ιδανικό αέριο.

**(γ΄)** Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την καταστατική εξίσωση $p + \frac{an}{bV} = nRT$ όπου $a$, $b$ θετικές φυσικές σταθερές. Υπολογίστε τη συμπιεστότητα και το συντελεστής κυβικής διαστολής.

**(δ΄)** Ελέγξτε αν η συμπιεστότητα και ο συντελεστής κυβικής διαστολής είναι θετικοί ή αρνητικοί. Υπάρχει κάτι το ασύνηθες ως προς αυτό;

**Άσκηση 4.5**

Δίνεται η καταστατική εξίσωση van der Waals (vdW) $p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2}$ , όπου $a, b > 0$. Εκφράστε την σε μορφή Virial.