

**Εισαγωγή στην Κυματική – Ερωτήσεις και Ασκήσεις**

Κωνσταντίνος Ευταξίας

Τμήμα Φυσικής

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

[1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ 2](#_Toc436097695)

[2. Η ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ - Η ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ 3](#_Toc436097696)

[3. ΤΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ 7](#_Toc436097697)

[4. Η ΦΑΣΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ – Η ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΟΜΑΔΑΣ – ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΗΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ 8](#_Toc436097698)

[5. ΕΝΕΡΓΙΑ-ΕΜΠΕΔΗΣΗ– ΑΝΑΚΛΑΣΗ – ΔΙΑΘΛΑΣΗ– ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ 11](#_Toc436097699)

[6. ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ 22](#_Toc436097700)

# Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

1. Γιατί είναι καθοριστική η δυνατότητα διάκρισης «ισοφασικής επιφάνειας» για τη μαθηματική μελέτη των κυμάτων;

2. Γιατί η φασική ταχύτητα δεν είναι μια ταχύτητα όπως αυτή που μέχρι τώρα γνωστή; Είναι ανυσματικό μέγεθος; Υπόκειται στους περιορισμούς της θεωρίας της σχετικότητας, μπορεί να είναι μεγαλύτερη από τη ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό;

3. Γιατί ορίζουμε «φυσικά μεγέθη», όπως η φασική ταχύτητα, που είναι ιδεατά και δεν εμπλέκονται άμεσα στην περιγραφή της πραγματικότητας; Το αρμονικό κύμα απεικονίζει μια πραγματική φυσική διεργασία ή έχει ιδεατό, μαθηματικό, περιεχόμενο.

4. Εστιάστε την προσοχή στην έκφραση ότι: «η φασική ταχύτητα γεφυρώνει το χρόνο με το χρόνο».

5. Ποια είναι η φυσική διεργασία που χαρακτηρίζει όλες τι κυματικές διαδόσεις και είναι αυτή που επιτρέπει την ενοποίηση τους ανεξάρτητα από τη φύση τους;

6. Σε δωμάτιο λειτουργεί μια πηγή θέρμανσης μεταβάλλοντας τη θερμοκρασία Τ σε κάθε σημείο (x, y, z) κάθε χρονική στιγμή t. Το πεδίο ΔΤ = ΔΤ(x, y, z, t) αναμένεται να έχει τα χαρακτηριστικά μιας κυματικής διάδοσης;

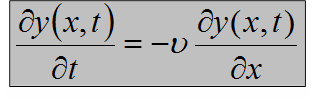
7. Το κύμα περιγράφει τη διάδοση μιας διαταραχής. Όταν διαδίδεται το φως, το ηλεκτρομαγνητικό κύμα, στο κενό τι διαταράσσεται;

8. Γιατί εννοιολογικά, εκ πρώτης όψεως, είναι ασύμβατες οι έννοιες «σωματίδιο» και κύμα;

9. Ποιες φυσικές ποσότητες, εννοιολογικά ταυτόσημες, εμπλέκονται στη διαμόρφωση της φασικής ταχύτητας, ανεξάρτητα από τη φύση της κυματικής διάδοσης; Αιτιολογείται η εμπλοκή αυτή των παραμέτρων στη διάδοση ενός κύματος;

# Η ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ - Η ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

1. Δικαιολογείστε με εννοιολογικά, «γεωμετρικά», επιχειρήματα την ισχύ της σχέσης:



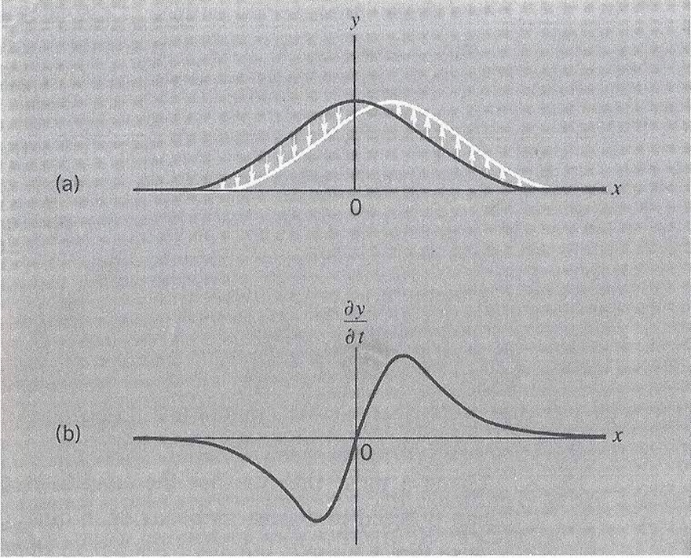
2. Συμφωνείται με την άποψη ότι η εγκάρσια ταχύτητα κίνησης των διαφόρων τμημάτων μιας χορδής, όπου διαδίδεται μια εγκάρσια διαταραχή, είναι μικρότερη της φασικής ταχύτητας που αντιστοιχεί στη διάδοση αυτή;

3. Δικαιολογείστε γιατί η γνώση της μορφολογίας της κυματικής εξίσωσης



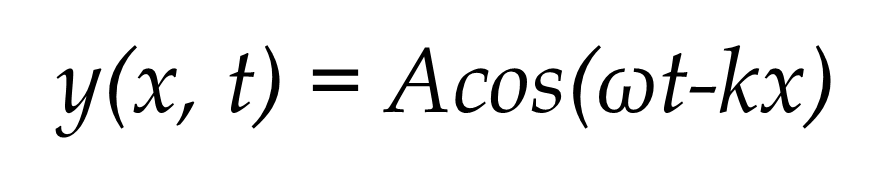
δεν είναι αρκετή για τη μελέτη των κυματικών φαινομένων και έτσι, πρέπει να προχωρήσουμε στη διατύπωση της διαφορικής εξίσωσης.

4. Στο σχήμα (a) το μαύρο περίγραμμα δίνει σε ένα στιγμιότυπο τις εγκάρσιες απομακρύνσεις μιας ελαστικής χορδής. Το λευκό περίγραμμα δίνει την ίδια εικόνα μια χρονική στιγμή αργότερα. Προφανώς η διαταραχή κινείται προς τα δεξιά. Να δικαιολογηθεί: (i) η κατανομή της εγκάρσιας ταχύτητας που



απεικονίζεται στο σχήμα (b) και (ii) γιατί η διαταραχή «σπρώχνεται» προς τα δεξιά.

5. Σε χορδή διαδίδεται το αρμονικό κύμα:



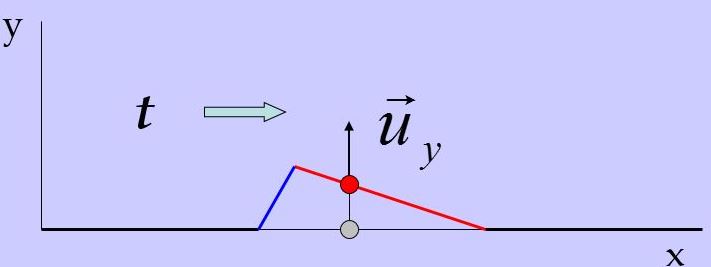
Σε μια δεδομένη θέση x το αντίστοιχο στοιχειώδες τμήμα της χορδής κάνει γραμμική αρμονική ταλάντωση. Ταυτίζεται η ταλάντωση αυτή με εκείνη που κάνει μια μάζα που είναι κρεμασμένη από ένα ελατήριο, απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του συστήματος και αφήνεται το σύστημα ελεύθερο;

6. Με αναφορά στη διαφορική εξίσωση του κύματοςνα δικαιολογηθεί η πρόταση ότι η εγκάρσια επιτάχυνση ενός στοιχειώδους τμήματος της χορδής είναι ανάλογη της γεωμετρικής καμπυλότητας του σχήματος της χορδής στο αντίστοιχο σημείο της χορδής.

7. Στο σχήμα απεικονίζεται στιγμιότυπο μια διαταραχής που περιγράφεται με τη βοήθεια της χωρικής κατανομής της εγκάρσιας ταχύτητας των διαφόρων θέσεων της χορδής.

Να δοθεί το αντίστοιχο στιγμιότυπο της διαταραχής με φυσικό μέγεθος περιγραφής της την εγκάρσια απομάκρυνση.

Να δοθεί η αντίστοιχη χωρική κατανομή της εγκάρσιας επιτάχυνσης.



8. Από τις συναρτήσεις που ακολουθούν ποιες ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση του κύματος; Υπάρχει η ένσταση ότι αν και μερικές από αυτές την επαληθεύουν δεν είναι δυνατό να απεικονίζουν κυματικές διαδόσεις. Συμφωνείτε;

9. Με εννοιολογικά επιχειρήματα κάποιος ισχυρίζεται ότι η συνάρτηση δεν είναι δυνατό να απεικονίζει κυματική διάδοση. Συμφωνείτε;

10. Η εξίσωση επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση του κύματος; Περιγράφει κυματική διάδοση;

11. Έστω η διάδοση επίπεδου αρμονικού κύματος Οι ισοφασικές επιφάνειες είναι επίπεδα κάθετα στον άξονα-x. Συμφωνείται; Οι ισοφασικές επιφάνειες ταυτίζονται με τις «ισομετρικές επιφάνειες», με τους γεωμετρικούς τόπους, δηλαδή, όπου το φυσικό μέγεθος που περιγράφει τη διαταραχή, y, έχει την ίδια τιμή μια δεδομένη χρονική στιγμή. Συμφωνείται;

12. Διαταραχή διαδίδεται κατά μήκος του άξονα-x περιγραφόμενη από την εξίσωση:

*.*

Περιγράψτε τη διαταραχή αυτή, τι «περίεργο» έχει σε σχέση με τα παραδοσιακά κύματα;

Ποια είναι η φυσική σημασία της παραμέτρου *K*.

Να χαραχθούν οι ισοφασικές επιφάνειες.

Να χαραχθούν οι «ισομετρικές επιφάνειες».

Παρατηρείστε ότι για το κύμα αυτό οι ισοφασικές επιφάνειες είναι κάθετες προς τις ισομετρικές.

13. Ένας εγκάρσιος παλμός που διαδίδεται σε χορδή περιγράφεται συνήθως με την εγκάρσια απομάκρυνση που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση του κύματος. Η εγκάρσια διαταραχή μπορεί να αποδοθεί είτε με την εγκάρσια ταχύτητα

είτε με την κλίση .

Να αποδειχθεί ότι τα δύο παραπάνω φυσικά μεγέθη επίσης ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση του κύματος.

Και στα τρία φυσικά μεγέθη περιγραφής μιας εγκάρσιας διαταραχής αντιστοιχεί η ίδια φασική ταχύτητα διάδοσης. Ήταν αναμενόμενο αυτό;

14. Εστιάστε στο γεγονός ότι η ικανοποίηση της διαφορικής εξίσωσης του κύματος για τη διάδοση εγκάρσιας διαταραχής σε χορδή προϋποθέτει την ικανοποίηση αριθμού προϋποθέσεων. Αναφερθείτε σε αυτούς τους περιορισμούς, ποιοι αναφέρονται στη χορδή, ώστε αυτοί να την κατατάσσουν στην κατηγορία των «ιδανικών χορδών» και ποιοι στα χαρακτηριστικά της διαταραχής; Εστιάστε στην πρόταση ότι η χρήση προτύπων, όπως στην προκειμένη περίπτωση, έχει «κόστος», αποκατάσταση δηλαδή μη φυσικών διευθετήσεων. Υπάρχει κόστος που συνοδεύει τη μελάτη μιας εγκάρσιας διαταραχής σε χορδή κάτω από τις ιδανικές συνθήκες που έχουν τεθεί;

# ΤΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ

1. Γιατί το αρμονικό κύμα είναι μια ανύπαρκτη φυσική ποσότητα, είναι μια μαθηματική, απλά, έννοια; Γιατί, παρ’ όλα αυτά, εισάγεται στη μελέτη μας, τι την καθιστά τελικά χρήσιμη;

2. O γωνιακός κυματικός αριθμός είναι ανυσματικό μέγεθος, παρέχει, έτσι, πληροφορία και για τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος και για τη φορά διάδοσης. Γιατί το μήκος κύματος, που έχει πιο αντιληπτή φυσική σημασία, δεν είναι ανυσματικό φυσικό μέγεθος;

3. Εστιάστε στην έκφραση ότι ενώ το ω απεικονίζει συχνότητα στον χώρο, το k απεικονίζει συχνότητα στο χώρο. Είναι το ένα φυσικό μέγεθος ανάλογο του άλλου;

4. Εστιάστε στο γεγονός ότι ένα αρμονικό κύμα έχει σαν αναλλοίωτο χαρακτηριστικό τη γωνιακή του συχνότητα, ω, και όχι, για παράδειγμα τον γωνιακό κυματικό του αριθμό και συνεπώς το μήκος κύματός του. Σκεφτείτε φυσικά επιχειρήματα που επιβεβαιώνουν τη διευθέτηση αυτή.

5. Συμφωνείτε με την έκφραση ότι σε ένα αρμονικό κύμα μπορεί να αντιστοιχούν άπειρα μήκη κύματος;

# Η ΦΑΣΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ – Η ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΟΜΑΔΑΣ – ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΗΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

1. Γιατί η φασική ταχύτητα είναι φυσικό μέγεθος «μαθηματικής» και όχι φυσικής υπόστασης; Ποια ανάγκη επιβάλλει την εισαγωγή της έννοιας της ταχύτητας ομάδας; Ποιο γεγονός καθιστά χρήσιμη την εισαγωγή αυτής της έννοιας με μαθηματική υπόσταση;

2. Σε μια ιδανική χορδή, γραμμικής πυκνότητας μ που τείνεται με δύναμη Τ, είναι επιτρεπτή η διάδοση αρμονικού εγκάρσιου κύματος ανεξάρτητα από τη συχνότητά του ω. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο αν το μέσο διάδοσης συνιστά μια αλληλουχία σωματιδίων μάζας m που συνδέονται μεταξύ τους με ελατήρια σταθεράς D. Σε αυτή την περίπτωση είναι επιτρεπτή η διάδοση αρμονικού κύματος που η συχνότητά του δεν υπερβαίνει τη συχνότητα:



Ποιο είναι το φυσικό αίτιο που απαγορεύει τη διάδοση διαταραχής με μεγαλύτερη συχνότητα; Δικαιολογείται η παρουσία στον παρονομαστή της μάζας m και στον αριθμητή της σταθεράς D στην παραπάνω σχέση; Προβλέπει η τελευταία τη συμπεριφορά της ιδανικής χορδής όσον αφορά την ικανότητά της να διαδίδει όλο το φάσμα των συχνοτήτων;

3. Σε κυματική διάδοση η ταχύτητα ομάδας είναι διπλάσια της φασικής σε κάθε συχνότητα. Να προταθεί σχέση διασποράς ω = ω(k) που ικανοποιεί μια τέτοια διευθέτηση.

4. Κυματική διάδοση χαρακτηρίζεται από τη σχέση διασποράς = .

Για ποιες τιμές της παραμέτρου x ο διασκεδασμός είναι ομαλός ή ανώμαλος αντίστοιχα;

5. Οι κυματικές διαταραχές , (*x,t)= Asin(4x-9t)* συμβάλουν. Μπορεί να αποδοθεί ομαδική ταχύτητα στη διαταραχή που προκύπτει και σε περίπτωση καταφατικής απάντησης ποια είναι αυτή;

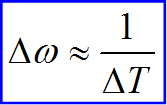
6. Κυματική διάδοση χαρακτηρίζεται από τη σχέση διασποράς



όπου b και σταθερές ποσότητες.

Γύρω από ποια συχνότητα πρέπει να διαμορφώνεται το φάσμα μιας διαταραχής ώστε η πληροφορία που αυτή μεταφέρει να διαδίδεται με τη μέγιστη δυνατή ταχύτητα;

7. Ποια είναι η φυσική εξήγηση του γεγονότος ότι το εύρος των συχνοτήτων των αρμονικών συναρτήσεων που απαιτείται για την αναπαραγωγή ενός απεριοδικού κυματοσυρμού μεγαλώνει όσο η διάρκεια του τελευταίου μικραίνει, ότι είναι δηλαδή:



Η αρχή της αβεβαιότητας της σύγχρονης φυσικής είχε το σπέρμα της στη σχέση αυτή;

8. Κυματική διάδοση υπακούει στη σχέση διασποράς:



Να δειχτεί ότι:



Τι συμβαίνει για n=1 και n=2;

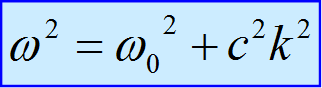
Προτείνατε σχέσεις διασποράς για τις οριακές αυτές περιπτώσεις.

9. Δίδεται η πληροφορία ότι κυματική διάδοση υπόκειται στη σχέση διασποράς:



Υπάρχει η πληροφορία ότι η πρόταση είναι λανθασμένη. Σχολιάστε.

10. Η διάδοση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στο πλάσμα δίνεται από τη σχέση



Όπου σταθερή φυσική ποσότητα και *c* η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Να αποδειχτεί ότι το γινόμενο της φασικής επί της ομαδικής ταχύτητας είναι σταθερό.

Να αποδειχτεί ότι εάν η συχνότητα ω προσεγγίζει την από τις μεγαλύτερες τιμές, η φασική ταχύτητα τείνει προς το άπειρον.

Να αποδειχτεί ότι εάν η συχνότητα ω έχει μεγάλες τιμές, θεωρητικά είναι ω = η φασική ταχύτητα είναι ίση με την ομαδική. Πως συμβαίνει αυτό αφού η σχέση διασποράς δεν είναι της μορφής k; Δικαιολογήσατε με φυσικά επιχειρήματα.

Τι θα πρέπει να συμβαίνει με τη συχνότητα που αντιστοιχεί στα μέταλλα και την ιονόσφαιρα ώστε το φως να ανακλάται από τα πρώτα και να διαπερνά τη δεύτερη; Έχει σχέση η διαμόρφωση της τιμής της της ιονόσφαιρας στην αποκατάσταση και διατήρηση ζωής στη γη;

11. Υποθέτουμε ότι κάπου στο διάστημα έχει εγκλωβιστεί πλάσμα. Η περιοχή εγκλωβισμού γεωμετρικά έχει τη μορφή ενός συγκλίνοντος φακού. Η σχέση διασποράς των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα δίνεται από τη σχέση:



Παράλληλη δέσμη φωτός με συχνότητα μεγαλύτερη της πέφτει στο πλάσμα παράλληλα προς τον κύριο άξονα του «φακού». Η δέσμη θα εστιάσει ή θα αποκλίνει;

12. O δείκτης διάθλασης δίνεται από τη σχέση:

Η ταχύτητα υ αναφέρεται στη φασική ταχύτητα ή στην ταχύτητα ομάδας;

13. Όταν φως μπαίνει σε μια γυάλινη πλάκα η ταχύτητα του ελαττώνεται από c σε υ. Κάποιος ισχυρίζεται ότι το φως «φρενάρει» στο γυαλί, οπότε βγαίνει από την πλάκα και τρέχει πάλι στο κενό με την ταχύτητα υ. Σχολιάστε. Ποια φυσική διεργασία οδηγεί στην ελάττωση της φυσικής ταχύτητας κατά την πορεία του φωτός στο γυαλί;

14. Εξηγείστε γιατί τα «σολιτόνια» διατηρούν τη μορφολογία τους κατά τη διάδοσή τους; Ποια φυσική διαδικασία δρα ανταγωνιστικά στη διασπορά και οδηγεί στο αποτέλεσμα αυτό;

15. Γιατί δεν έχει νόημα η έκφραση «δέσμη μονοχρωματικού φωτός συχνότητας ω…». Ποια φυσική διεργασία που έχει σχέση με την εκπομπή του φωτός καθιστά λανθασμένη την έκφραση αυτή;

16. Περιγράψτε ανατροπές που έφεραν στις παραδοσιακές έννοιες τα μεταυλικά.

# ΕΝΕΡΓΙΑ-ΕΜΠΕΔΗΣΗ– ΑΝΑΚΛΑΣΗ – ΔΙΑΘΛΑΣΗ– ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

1. Είναι δυνατό κύμα που διαδίδεται σε ένα υλικό, να συναντά κατά τη διάδοσή του διαχωριστική επιφάνεια πέραν της οποίας υπάρχει διαφορετικό υλικό και το κύμα να μην ανακλάται, αλλά, εξ΄ ολοκλήρου να διαθλάται;

2. Εξηγείστε με φυσικά επιχειρήματα γιατί ενώ ο ανακλώμενος παλμός είναι δυνατό να αναστρέφεται ή όχι, ενώ ο διαθλώμενος παλμός δεν αναστρέφεται ποτέ; Αναφερθείτε στην περίπτωση που ο παλμός πέφτει σε «τοίχο», συναντά δηλαδή μέσο με άπειρη εμπέδηση. Γιατί αντιστρέφεται ο παλμός;

3. Σε χορδή διαδίδεται αρμονικό κύμα

(a) Να αποδειχτεί ότι η πυκνότητα της μηχανικής ενέργειας διαδίδεται αρμονικά με διπλάσια συχνότητα 2ω και με διπλάσιο γωνιακό κυματικό αριθμό 2k.

(b) Μετά τον διπλασιασμό της γωνιακής συχνότητας, ήταν αναμενόμενος ο διπλασιασμός και του γωνιακού κυματικού αριθμού;

4. Χορδή μήκους L, με παραμέτρους (Τ, μ), είναι πακτωμένη στα δύο άκρα της. Το μέσο της χορδής ανυψώνεται κατά Η και αφήνεται ελεύθερο.

Πόση μηχανική ενέργεια κατανέμεται συνολικά σε όλα τα στάσιμα κύματα που θα αναπτυχθούν από αυτήν τη διαταραχή;

5. Οι τύποι που δίνουν τους συντελεστές ανάκλασης, R, και διέλευσης, Τ, αποδεικνύονται με αναφορά την ύπαρξη αρμονικού κύματος, μιας διαταραχής που έχει μόνο μαθηματική υπόσταση και όχι φυσική. Πως μεταφέρεται η ισχύς των τύπων σε μη αρμονικές, πραγματικές, διαταραχές; Είναι πάντα δυνατή η μεταφορά στην περιγραφή του ανακλώμενου-διαθλώμενου παλμού;

6. Εκατέρωθεν της θέσης x=0 εκτείνονται δύο χορδές παραμέτρων

(Τ, 25μ) και (Τ, μ), αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Στη χορδή που καλύπτει τον αρνητικό ημιάξονα διαδίδεται τριγωνικός ισοσκελής παλμός με βάση μήκους L και ύψους Η, όπως φαίνεται στο κάτω σχήμα.

(a) Πόσο ενέργεια δαπανήθηκε για τη δημιουργία του παλμού αυτού;

Στο κάτω σχήμα απεικονίζεται στιγμιότυπο της χορδής μια χρονική στιγμή που η κορυφή του τριγωνικού παλμού απέχει απόσταση D από τη θέση x=0.

(b) Να απεικονισθεί το στιγμιότυπο της χορδής μια χρονική στιγμή μετά από εκείνη της ολοκλήρωσης της δημιουργίας του ανακλώμενου και διαθλώμενου παλμού. Συγκεκριμένα, να βρεθούν τα γεωμετρικά στοιχεία του ανακλώμενου και διαθλώμενου παλμού και οι αποστάσεις τους από τη θέση x=0 τη στιγμή αυτή.

(c) Τι εξασφαλίζει ότι ο ανακλώμενος και ο διαθλώμενος παλμός θα διατηρήσουν τριγωνικό σχήμα;

7. Σε χορδή παραμέτρων (Τ, ) διαδίδεται παλμός με γεωμετρία ισοσκελούς τριγώνου βάσης L και ύψους Η. Ο παλμός συναντά στη θέση x=0 ασυνέχεια, πέραν της θέσης αυτής εκτείνεται χορδή παραμέτρων (Τ, Κάποια στιγμή μετά την ολοκλήρωση της ανάκλασης-διάθλασης παίρνουμε ένα στιγμιότυπο της χορδής. Παρατηρούμε ότι ο διαθλώμενος παλμός έχει διαδοθεί σε διπλάσια απόσταση από τη θέση x=0 από ότι έχει διαδοθεί ο ανακλώμενος. Να βρεθούν οι βάσεις-ύψη των δύο παλμών. έχει αντιστραφεί ο ανακλώμενος παλμός;

8. Στη θέση x=0 χορδής παραμέτρων (Τα, μ) τοποθετείται μάζα m. Υποθέτουμε ότι αρμονική διαταραχή παραμέτρων (ω, k) διαδίδεται από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Δίδεται η πληροφορία ότι οι συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης R και Τα, αντίστοιχα, δίδονται από τους τύπους

όπου

Δεν διευκρινίζεται όμως ποιος τύπος αντιστοιχεί στον συντελεστή R και ποιος στον Τ.

(a) Mε φυσικά επιχειρήματα να προταθεί η αντιστοίχιση. Η προσπάθεια να γίνει διερευνώντας την παρουσία: (i) της παραμέτρου m, (ii) της παραμέτρου ω.

(b) Τι σημαίνει ότι οι συντελεστές R και Τ είναι μιγαδικές ποσότητες;

(c) Εάν τριγωνικός παλμός πέσει στη μάζα m, ο ανακλώμενος-διαθλώμενος παλμός που θα προκύψουν θα διατηρήσουν τη τριγωνική μορφολογία του προσπίπτοντος παλμού;

9. Γνωρίζουμε ότι εάν δύο χορδές εμπεδήσεων και , αντίστοιχα, συνδεθούν, μια διαταραχή που προσπίπτει στην ασυνέχεια προερχόμενη από τη χορδή (1) εν μέρει αυτή ανακλάται και εν μέρει διαθλάται προς τη χορδή (2).

(a) Να αποδειχτεί ότι εάν μεταξύ των δύο παρεμβληθεί χορδή που έχει:

(i) Εμπέδηση Ζ που ικανοποιεί τη σχέση

,

(ii) Μήκος , όπου λ το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στο υλικό της χορδής που παρεμβάλλεται μεταξύ των ακραίων,

τότε όλη η ενέργεια της προσπίπτουσας διαταραχής μεταφέρεται εξ’ ολοκλήρου από την χορδή (1) στη χορδή (2).

Δώστε μια φυσική εξήγηση πως είναι δυνατό να περνά όλη η ενέργεια στη χορδή (2) ενώ κατά την πρώτη πρόσκρουση της διαταραχής στο σύνορο της χορδής (1) και αυτής που έχει παρεμβληθεί ήδη έχει σημειωθεί ανάκλαση, επιστροφή δηλαδή της ενέργειας στην χορδή (1).

(b) Να προταθεί μια άλλου τύπου παρεμβολή ενδιάμεσης χορδής, μεταβαλλόμενης χωρικά εμπέδησης, που θα οδηγούσε στο ίδιο αποτέλεσμα και η διατύπωση των χαρακτηριστικών της δεν απαιτεί μαθηματική επεξεργασία.

(c) Είναι γνωστό ότι ένα σωματίδιο μάζας και ταχύτητας υ, όταν συγκρούεται ελαστικά με άλλο ακίνητο μάζας , μεταβιβάζει σε αυτό όλη του την κινητική ενέργεια αν συμβεί να είναι =. Να αποδειχτεί ότι στην περίπτωση που οι δύο μάζες δεν είναι ίδιες, τότε, για να πετύχουμε τη μέγιστη μεταφορά κινητικής ενέργειας από την πρώτη στη δεύτερη πρέπει να παρεμβάλουμε μεταξύ αυτών ένα σωματίδιο ακίνητο με μάζα:

Διακρίνεται κάποιες αναλογίες μεταξύ του μηχανικού αυτού προβλήματος και εκείνου του κυματικού στο οποίο εστιάσαμε παραπάνω;

Aν είχαμε στη διάθεσή μας σωματίδια με άπειρη ποικιλία μαζών, πως θα μπορούσαμε να επιλέξουμε μια συλλογή από αυτά ώστε, αν τα παρεμβάλουμε μεταξύ των αρχικών, να κάνουμε δυνατή τη μεταφορά όλης της κινητικής ενέργειας από το στο ;

10. Σε χορδή πακτωμένη στα δύο άκρα της θέλουμε να αναπτυχθούν οι δύο πρώτοι από τους επιτρεπόμενους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης. Προτείνεται έναν τρόπο διέγερσης της χορδής ώστε αυτό να γίνει εφικτό.

11. Χορδή πακτωμένη στα δύο άκρα της, μήκους L, θέλουμε να μην αναπτυχθεί ο τρίτος από τους επιτρεπόμενους κανονικός τρόπος ταλάντωσης. Προτείνεται μία διέγερση της χορδής που κάνει εφικτό κάτι τέτοιο.

12. Χορδή μήκους L = 2 m είναι πακτωμένη στα δύο άκρα της. Στις παραμέτρους της χορδής (Τ, μ) αντιστοιχεί ταχύτητα διάδοσης εγκάρσιου παλμού . Η χορδή παραμορφώνεται σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες:

(a) Ποια στάσιμα κύματα από τα επιτρεπόμενα να αναπτυχθούν θα διεγείρει αυτή η παραμόρφωση;

(b) Να βρεθεί η που περιγράφει την εγκάρσια απομάκρυνση σε κάθε θέση κάθε χρονική στιγμή μετά την ανάπτυξη των διεγερθέντων στάσιμων κυμάτων.

13. Χορδή, που έχει μήκος L και µάζα m, κρέμεται κατακόρυφα. Με κατάλληλη διέγερση σχηματίζεται τριγωνικός παλμός μικρού κατακόρυφου μήκους στην περιοχή του σημείου ανάρτησης που αρχίζει να διαδίδεται προς τα κάτω.

Να βρεθεί η σχέση που δίνει τη ταχύτητα διάδοσης του παλμού, υ, σε συνάρτηση με την απόσταση του παλμού από το ελεύθερο άκρο, x.

Σε πόσο χρόνο θα φτάσει ο παλμός στο ελεύθερο άκρο;

Με τι ταχύτητα θα προσεγγίσει ο παλμός το ελεύθερο άκρο;

Θα ανακλαστεί ο παλμός μετά την πρόσπτωσή του στο ελεύθερο άκρο;

Θα παραμορφώνεται ο τριγωνικός παλμός κατά τη διάδοσή του;

Τη στιγμή που αρχίζει η διάδοση του παλμού αφήνεται να πέφτει ελεύθερα σώμα. Σε πόση απόσταση από το ελεύθερο άκρο της χορδής το σώμα που πέφτει ελεύθερα θα συναντήσει τον διαδιδόμενο παλμό;

14. Σε χορδή μήκους L πακτωμένη και στα δύο άκρα της έχουν αναπτυχθεί μετά από κατάλληλη διέγερση οι δύο πρώτοι από τους επιτρεπόμενους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης που και οι δύο έχουν το μέγιστο πλάτος του τη χρονική στιγμή t=0.

Παρατηρητής μετρά τις εγκάρσιες απομακρύνσεις της χορδής στη θέση παρερχομένου του χρόνου και βρίσκει ότι η μεγαλύτερη εγκάρσια απομάκρυνση της χορδής είναι +10 cm. Μεταφέρεται στη συνέχεια στη θέση όπου βρίσκει ότι η μεγίστη εγκάρσια απομάκρυνση είναι επίσης 10 cm.

(a) Ποια είναι τα πλάτη των δύο κανονικών τρόπων ταλάντωσης που έχουν αναπτυχθεί;

(b) Να δειχθεί ότι στη θέση η μεγίστη εγκάρσια απομάκρυνση είναι -10 cm.

15. Χορδή μήκους L έχει γραμμική πυκνότητα μ και τείνεται με δύναμη μέτρου Τ. Το ένα άκρο της πακτώνεται. Το άλλο καταλήγει σε δαχτυλίδι αμελητέου βάρους που κινείται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο ράβδο, δηλαδή, κινείται ελεύθερα.

Να δικαιολογηθεί γιατί οι αρχικές συνθήκες περιγράφονται από τις σχέσεις:

=0 και

Η χορδή διεγείρεται σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες:

και sin()

Να δειχτεί ότι τα στάσιμα κύματα που θα αναπτυχθούν έχουν γωνιακό κυματικό αριθμό:

= .

Ήταν αναμενόμενη η απουσία στασίμων κυμάτων αρτίας τάξης;

Ποιες είναι οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες των στασίμων κύμάτων;

16. Σε χορδή παραμέτρων (Τ,μ) διαδίδεται αρμονικό κύμα

*.*

Είναι γνωστό ότι η μηχανική ενέργεια κατανέμεται κατά μήκος της χορδής σε έκταση ίση με ένα μήκος κύματος με μέση χωρική πυκνότητα:

Να δικαιολογηθεί με φυσικά επιχειρήματα η παρουσία στην έκφραση αυτή των παραμέτρων Τα, λ, Α όπως και ο τρόπος της παρουσίας τους, γιατί, για παράδειγμα, ήταν αναμενόμενη η παρουσία του πλάτους Α υψωμένη σε άρτια δύναμη.

Πως δικαιολογείται η απουσία της παραμέτρου μ από τον τύπο; Ήταν αναμενόμενη η απουσία αυτή;

17. Μετά τη μελέτη της προηγούμενης άσκησης, υποθέτει κάποιος ότι στην ίδια ιδανική χορδή αρχίζουν να διαδίδονται ταυτόχρονα και συμφασικά δύο όμοια σε όλες τις παραμέτρους τους αρμονικά κύματα. Σκέπτεται ότι η μέση χωρική ενέργεια του καθενός κύματος θα είναι ανάλογη του τετραγώνου του κοινού πλάτους τους. Συνεπώς, η ολική μέση χωρική ενέργεια θα είναι ανάλογη του διπλάσιου τετραγώνου του κοινού πλάτους. Σκέφτεται, όμως, ότι τα δύο κύματα θα συμβάλουν και το αποτέλεσμα της συμβολής τους θα είναι η δημιουργία ενός αρμονικού κύματος με πλάτος διπλάσιου του κοινού πλάτους. Τότε όμως η μέση χωρική πυκνότητα της ενέργειας θα είναι ανάλογη του τετραγώνου του αυτού του πλάτους, διπλάσια δηλαδή από τη μέση χωρική ενέργεια που αντιστοιχεί στη διάδοση των δύο μεμονωμένων κυμάτων! Σχολιάστε τις σκέψεις του.

18. Ζητείται να βρεθεί η μηχανική ενέργεια που μεταφέρει εγκάρσιος παλμός κατά τη διάδοσή του σε ιδανική χορδή, παραμέτρων (Τ, μ,) όταν ο παλμός έχει: (i) σχήμα ισοσκελούς τριγώνου ύψους Η και αναπτύσσεται σε τμήμα μήκους L της χορδής; (ii) σχήμα παραλληλογράμμου, όπου όλα τα σημεία της χορδής έχουν ανυψωθεί κατά H σε ένα τμήμα της χορδής που έχει μήκος L. Διακρίνεται κάποιο παράδοξο σε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις; Σχολιάστε σχετικά.

19. Χορδή παραμέτρων (Τ,μ)έχει μήκος L. To ένα της άκρο (x=0) πακτώνεται, ενώ το άλλο άκρο (x=L) ύστερα από κατάλληλη διέγερση ακολουθεί την κίνηση

Να αποδειχτεί ότι στη μόνιμη κατάσταση, η διαταραχή που έχει αποκατασταθεί περιγράφεται από την εξίσωση: sinωt.

H συχνότητα ω είναι τέτοια ώστε το μήκος κύματος του στασίμου κύματος που αναπτύσσεται ικανοποιεί τη σχέση: λ

Να αποδειχθεί ότι το πλάτος του στάσιμου κύματος είναι .

20. Ταυτίζεται η έννοια του μήκους κύματος για το στάσιμο κύμα και για το οδεύον κύμα;

21. Σε ιδανική χορδή διαδίδονται δύο εγκάρσιοι παλμοί προς αντίθετες κατευθύνσεις. Οι δύο παλμοί έχουν το ίδιο γεωμετρικό περίγραμμα, ό ένας όμως είναι ορθός και ο άλλος ανεστραμένος. Ο κάθε παλμός έχει μια μηχανική ενέργεια. Έρχεται μια στιγμή που οι δύο παλμοί συναντώνται καλύπτοντας την ίδια περιοχή της χορδής. Σε εκείνο το στιγμιότυπο είναι Τι έγινε η ενέργεια των δύο παλμών;

22. Οι ηχητικοί σωλήνες αποτελούν βάση για τη μελέτη μουσικών οργάνων. Μια κατηγορία οργάνων αντιστοιχεί σε ανοικτούς σωλήνες που διεγείρονται από τον μουσικό στο ένα άκρο τους και η ηχητική διαταραχή ανακλάται στο άλλο ανοικτό άκρο τους. Το αποτέλεσμα είναι η αποκατάσταση στασίμων κυμάτων που επαγωγικά δημιουργούν το ακουστικό αρμονικό αποτέλεσμα. Η ηχητική διαταραχή που δημιουργεί με το φύσημά του ο καλιτέχνης διαδίδεται στον αέρα που υπάρχει στον ηχητικό σωλήνα – μουσικό όργανο και πέραν του ανοικτού άκρου υπάρχει πάλι αέρας. Γιατί συμβαίνει λοιπόν ανάκλαση της ηχητικής διαταραχής στο άνοικτό άκρο αφού σε αέρα διαδίδεται αέρα συναντά;

23. Εγκάρσιος παλμός που το περίγραμμά του είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο διαδίδεται σε ιδανική χορδή. Για την περίπτωση που η διαταραχή περιγράφεται με την εγκάρσια απομάκρυνση έχουν αποδειχτει οι τύποι που δίνουν τους συντελεστές ανάκλασης-διάθλασης για την περίπτωση που η διαταραχή κατά τη διάδοσή της συναντήση μια ασυνέχεια στην χωρική κατανομή της εμπέδησης της χορδής. Υποθέτουμε τώρα ότι η διαταραχή περιγράφεται είτε με την εγκάρσια ταχύτητα της χορδής σε κάθε θέση κάθε χρονική στιγμή είτε με την αντίστοιχη κλίση του περιγράμματος της χορδής. Ισχύουν οι τύποι των συντελεστών ανάκλασης-διάθλασης που ισχύουν όταν η διαταραχή περιγράφεται με την εγκάρσια απομάκρυνση και στην περίπτωση που η περιγραφή γίνεται μέσω της εγκάρσιας ταχύτητας ή την κλίση;

24. Χορδή παραμέτρων (Τ, μ) μήκους L είναι πακτωμένη στα δύο άκρα της. Το μέσον της χορδής ανυψώνεται κατά Η. Πόση μηχανική ένέργεια έχει τότε η χορδή; Έστω τώρα ότι σε ιδανική χορδή των ίδιων παραμέτρων (Τ, μ) διαδίδεται εγκάρσια διαταραχή με ίδιο περίγραμμα, έχει περίγραμμα ισοσκελές τριγωνο βάσης L και ύψους Η. Ποια είναι η μηχανική ενέργεια του διαδιδόμενου παλμού;

25. Εξηγείστε πως είναι δυνατόν «τσιμπώντας» τη χορδή μιας κιθάρας αυτή να εκπέμπει αρμονικούς ήχους ενώ η διέγερσή της δεν είχε κανένα αρμονικό χαρακτηριστικό.

26. Εστιάστε στην πρόταση ότι στη μελέτη των στασίμων κυμάτων εμπλέκονται δύο κατηγορίες συχνοτήτων. Η μία αναφέρεται στο σύνολο των ιδιοσυχνοτήτων των στασίμων κυμάτων που εν δυνάμει μπορούν να αναπτυχθούν και διαμορφώνονται από τις συνοριακές συνθήκες που υπόκειται η ιδανική χορδή. Η δεύτερη στο υποσύνολο των συχνοτήτων που το στασίμων κυμάτων που αναπτύσονται από τις δεδομένες αρχικές συνθήκες παραμόρφωσης της χορδής. Αναφέρατε μια απλή διέγερση που με απλά φυσικά επιχειρήματα οδηγεί στο συμπέρασμα της διαφοροποίηση των δύο κατηγοριών συχνοτήτων-στασίμων κυμάτων, εκείνων που είναι «εν υπνώσει» με βάση τις συνοριακές συνθήκες και «αυτά που ξυπνούν» με βάση τη δεδομένη διέγερση.

27. Με αναφορά στο προηγούμενο θέμα, εξηγείστε γιατί η ενέργεια, που προσφέρεται σε μια πακτωμένη στα δύο άκρα της χορδή κατά τη διέγερσή της, κατανέμεται στο υποσύνολο των στασίμων κυμάτων που «ξυπνά» μια δεδομένη διέγερση κατά τέτοιο «σοφό» τρόπο, ώστε να είναι δυνατή η ανάδυση της έννοιας της μουσικής.

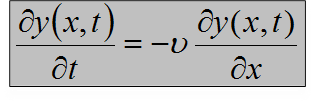
28. Εξηγείστε γιατί η χωρική πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας μιας εγκάρσιας διαταραχής είναι ανάλογη της κλίσης του περιγράμματος της χορδής υψωμένης σε άρτια δύναμη και όχι σε περιττή. Γιατί η δυναμική ενέργεια σώματος στο πεδίο βαρύτητας είναι ανάλογη του ύψους υψωμένη σε περιττή δύναμη (mgH);

29. Σε πακτωμένη στα δύο άκρα χορδή, μετά τη διέγερσή της, αναπτύσσονται στάσιμα κύματα. Είναι γνωστό από τη μαθηματική επεξεργασία ότι όσο αυξάνεται η ιδιοσυχνότητα των στασίμων κυμάτων τόσο ελαττώνεται το αντίστοιχο μήκος κύματος τους. Εξηγείστε με φυσικά επιχειρήματα γιατί διαμορφώνεται η διευθέτιση αυτή.

30. Το γινόμενο της ιδιοσυχνότητας επί το μήκος κύματος ενός στάσιμου κύματος δίνει μία ταχύτητα υ:

Έχει ταχύτητα υ το στάσιμι κύμα;

31. Ισχύει ο τύπος



για τα στάσιμα κύματα όπως και στα οδεύοντα;

32. Εστιάστε στην πρόταση ότι «το στάσιμο κύμα είναι εκφυλισμένη μορφή οδεύοντος κύματος». Τι σημαίνει αυτό, σε ποιες φυσικές διευθετίσεις στηρίζεταιη πρόταση αυτή;

# ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

**Σημείωμα Ιστορικού ΕκδόσεωνΈργου**

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0

**Σημείωμα Αναφοράς**

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, Κωνσταντίνος Ευταξίας, 2015.. «Εισαγωγή στην Κυματική – Ερωτήσεις και Ασκήσεις». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: [opencourses.uoa.gr/courses/PHS1](http://opencourses.uoa.gr/courses/PHS1)

**Σημείωμα Αδειοδότησης**

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[](file:///C:\Users\pantelis\Downloads\%5b1%5d%20http:\creativecommons.org\licenses\by-nc-sa\4.0\)

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

* που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
* που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
* που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

**Διατήρηση Σημειωμάτων**

* Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
* το Σημείωμα Αναφοράς
* το Σημείωμα Αδειοδότησης
* τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
* το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

**Χρηματοδότηση**

* Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στo πλαίσιo του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
* Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
* Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

