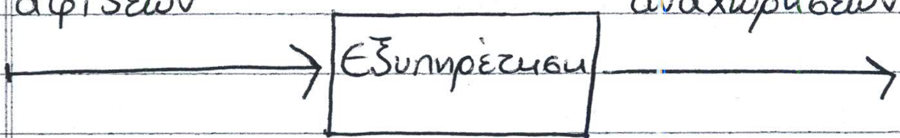
(*) → 11σέλιδο ασκήσεων στις Ουρές αναμονής στην e-class (Τα βασικά)

20/5/2013

Εισαγωγή στις Ουρές Αναμονής

(1) Πλαίσιο – Βασικά χαρακτηριστικά

Διαδικασία αφίξεων — Διαδικασία αναχωρήσεων



πχ) Αεροδρόμιο
Γραμμή Παραγωγής
Ταμείο
Ιατρείο κτλ...

Ουρά ≡ Στοχαστικό σύστημα εισόδου-εξόδου με διακριτές μονάδες.

Markovian/Memoryless

1) Διαδικασία αφίξεων → (Πως έρχονται? Poisson (M), Ανανεωτική διαδ (GI), Σταθεροί ενδιάμεσοι χρόνοι (D))
2) Χρόνοι εξυπηρέτησης → (exp (M), Γενικοί (GI ή G), Σταθεροί (D))
3) Αριθμός υπηρετών → c
4) Χωρητικότητα → K
5) Πειθαρχία ουράς → First-Come-First-Served (FCFS/FIFO)
Last-Come-First-Served (LCFS/LIFO)
Service-In-Random-Order (SIRO)
Shortest-Service-Time-First (SSTF)

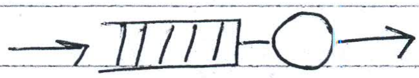
Ονοματολογία Kendall

A / B / c / K ( )

↑ Αφίξ, ↑ Εξυπ, ↑ Υπηρ, ↑ Χωρητ, ↑ Πειθ

Αν K παραλείπεται → K = ∞
" Πειθ " → FCFS

πχ) M/M/1 →



D/G/3/5 (SSTF)

a = Μέσος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων

$\lambda = \frac{1}{a}$ = Ρυθμός αφίξεων

b = Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

$\mu = \frac{1}{b}$ = Ρυθμός εξυπηρέτησης

② **3 διαφορετικές οπτικές**

- Διαχειριστής (Πόσοι πελάτες βρίσκονται στο σύστημα)
- Πελάτης (Να εξυπηρετηθούν όσο το δυνατόν γρηγορότερα)
- Υπηρέτης (Να ξεκουράζονται που και που...)

③ **Τμ και σ.δ στις ουρές αναμονής**

Διαχειρ.

$Q(t)$ = # πελ στο σύστημα τη στιγμή t
$Q_q(t)$ = # πελ σε αναμονή " " "
$Q_s(t)$ = # πελ σε διαδ. εξυπ. " " "

Πελάτης

t_i : χρόνος άφιξης του i πελάτη
τ_i : χρόνος αναχώρ. " " "
$S_i = \tau_i - t_i$: χρόνος παραμονής του i πελάτη (sojourn time)
W_i = Χρόνος αναμονής του i πελάτη (waiting time)
X_i = Χρόνος εξυπηρέτησης του i πελάτη
$Q_i^- = Q(t_i^-)$ = # πελ. που βλέπει μπαίνοντας ο i πελάτης
$Q_i^+ = Q(\tau_i^+)$ = # πελ. που βλέπει φεύγοντας ο i πελάτης

Υπηρ

I = περίοδος αργίας του συστήματος
Y = περίοδος συνεχούς λειτουργίας
$Z = I + Y$ = κύκλος λειτουργίας του συστήματος

④ Μέτρα απόδοσης συστήματος (ουράς)

Χρόνος που περνά η $\{Q(t)\}$ στο n στο $[0,t]$.

• $P(Q=n) = P_n = \underbrace{\lim_{t\to\infty} P(Q(t)=n)}_{\downarrow} = \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \mathbb{1}\{Q(u)=n\}du}{t}}_{\downarrow}$

οριακή πιθανότητα n πελ. στο σύστημα — μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου με n πελ. στο σύστημα.

• $E[Q] = \sum_n n P_n = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)\,du}{t}$ ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα

Όμοια $E[Q_q]$, $E[Q_s]$

• $r_n = \underbrace{\lim_{i\to\infty} P(Q_i^- = n)}_{\swarrow} = \underbrace{\lim_{i\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{i} \mathbb{1}\{Q_i^- = n\}}{i}}_{\downarrow}$

Το ποσοστό των πελατών που βλέπουν n πελάτες μπαίνοντας στο σύστημα.

πιθ. σε στιγμή άφιξης πελάτη να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα. — μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών που βλέπουν n μπαίνοντας στο σύστημα

Ομοίως,

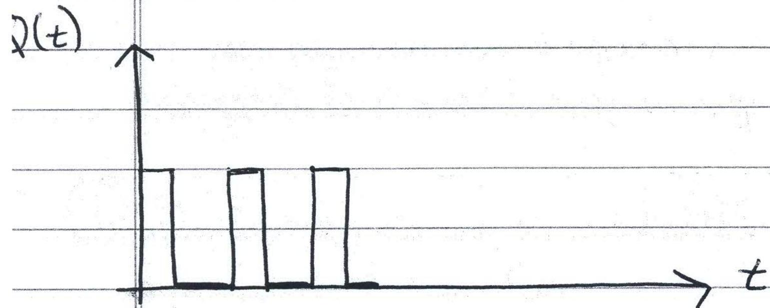
• $d_n = \underbrace{\lim_{i\to\infty} P(Q_i^+ = n)}_{\swarrow} = \underbrace{\lim_{i\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{i} 1\{Q_i^+ = n\}}{i}}_{\downarrow}$

πιθ σε στιγμή αναχωρ να υπάρχουν n πελάτες. στο σύστημα — μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών που αφήνουν (πίσω τους) n βγαίνοντας από το σύστημα.

(5) Διαφορά p_n, r_n, d_n.

Γενικά $(p_n) \neq (r_n) \neq (d_n) \neq (p_n)$

πχ) D/D/1 $a=1$, $b=0.1$



(p_n): $p_0 = 0.9$
$p_1 = 0.1$
$p_n = 0, n \geq 2$

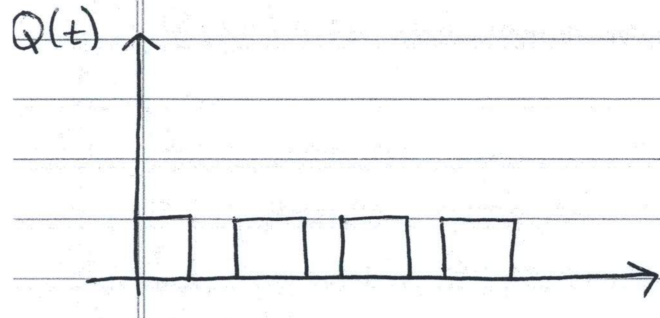
(r_n): $r_0 = 1$
$r_n = 0, n \geq 1$

(d_n): $d_0 = 1$
$d_n = 0, n \geq 1$

χρόνος από άφιξη σε άφιξη

χρόνος εξυπηρέτησης

D/D/1 $a=1$, $b=0.9$



(p_n): $p_0 = 0.1$
$p_1 = 0.9$
$p_n = 0, n \geq 2$

(r_n): $r_0 = 1$
$r_n = 0, n \geq 1$

(d_n): $d_n = 1$
$d_n = 0, n \geq 1$

Η εικόνα του πελάτη είναι ίδια σε 2 πολύ διαφ. συστήματα

(6) Μέτρα απόδοσης συστήματος (συνέχεια)

- $F_S(x) = \underbrace{\lim_{i\to\infty} P(S_i \leq x)}_{\text{πιθανότητα χρόνος παραμονής πελάτη } \leq x} = \underbrace{\lim_{i\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{i} 1\{S_i \leq x\}}{i}}_{\text{μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών με χρόνο παραμονής } \leq x.}$

κατανομή χρόνου παραμονής

Όμοια,

$F_W(x) \leftarrow$ κατανομή χρόνου αναμονής
$F_X(x) \leftarrow$ κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης

(7) Βασικά αποτελέσματα

1) Ευστάθεια (Πότε σε ένα σύστημα δεν απειρίζεται η ουρά...)
(Πότε το πλήθος των πελατών στο σύστημα δεν εκρήγνυται)
2) Νόμος Little (Σχέση $E[Q]$, λ, $E[S]$)
3) Ιδιότητα μεμονωμ. αφίξεων (ικανή συνθήκη για $r_n = d_n$)
4) Ιδιότητα PASTA (ικανή συνθήκη για $r_n = p_n$)
Poisson Arrivals See
Time Averages

(8) Ευστάθεια - Ρυθμός συνωστισμού

GI/G/c σύστημα με λ: ρυθμός αφίξεων
b: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

$\rho = \lambda b$: ρυθμός συνωστισμού
= έργο που εισέρχεται για διεκπεραίωση στο σύστημα ανά χρονική μονάδα.

Θεώρημα ευστάθειας

GI/G/c σύστημα με τυχαιότητα (όχι D/D/c σύστημα)
που δεν υπάρχει τυχαιότητα

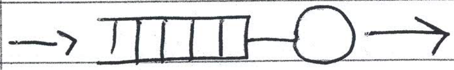
$\rho < c \iff$ ευστάθεια $\iff \exists\ (p_n), (r_n), (d_n)$ με $\sum_n p_n = \sum_n r_n = \sum_n d_n = 1$

$\rho \geq c \iff$ αστάθεια $\iff p_n = r_n = d_n = 0,\ n \geq 0$

22/5/2013

Ουρές αναμονής

(1) Πλαίσιο



Q : # πελατών στο σύστημα

Q^- : # πελατών στο σύστημα πριν την άφιξη πελάτη

Q^+ : # πελατών στο σύστημα μετά την άφιξη πελάτη

$\to d_n = P(Q^+ = n)$

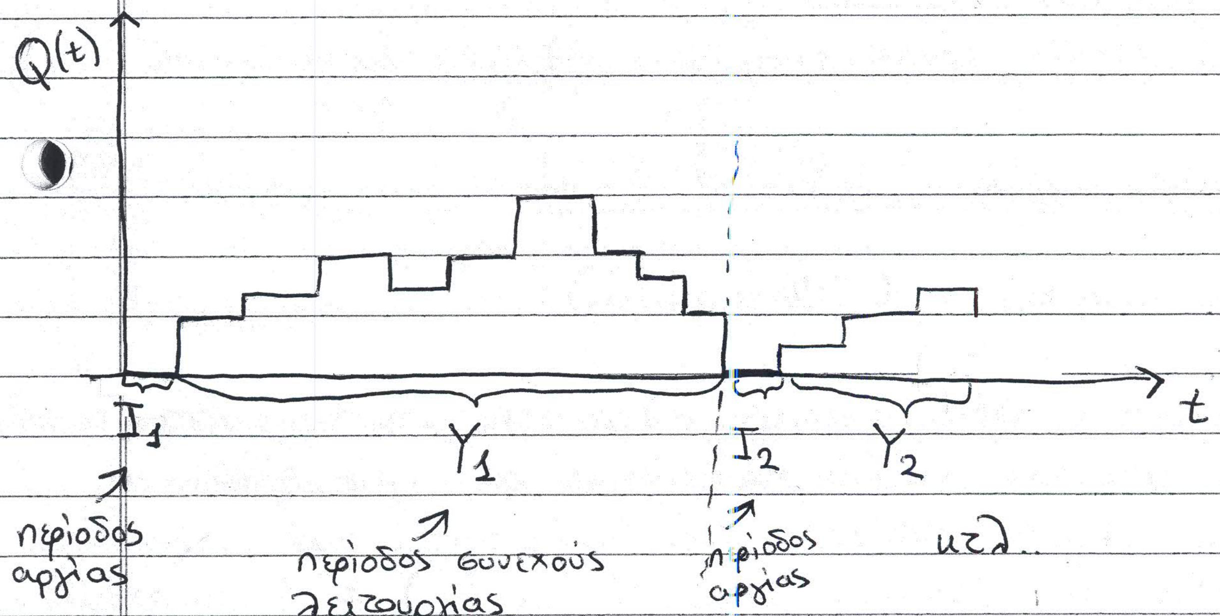
$\to r_n = P(Q^- = n)$

$\to p_n = P(Q = n)$

S : χρόνος παραμονής πελάτη

W : χρόνος αναμονής πελάτη

X : χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη



Z : κύκλος απασχ/λειτουργίας

Y : περίοδος συνεχούς λειτουργίας

I : περίοδος αργίας

② Βασικό αποτέλεσμα 1: Ευστάθεια

λ: ρυθμός αφίξεων
b: $E[X]$: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης
ρ: λb: ρυθμός συνωστισμού

Θεωρ:

Σε $GI/G/c$ ουρά ($c = \#$ υπηρ), όχι $D/D/C$

$\rho < c \iff$ ευστάθεια $\iff \exists\, p_n, r_n, d_n > 0 \;\forall n$ κ $\Sigma = 1$

$\rho \geq c \iff$ αστάθεια $\iff p_n = r_n = d_n = 0$

③ Βασικό αποτέλεσμα 2: Νόμος του Little

$E[Q]$ = Μέσο # πελατών στο σύστημα
λ = ρυθμός αφίξεων
$E[S]$ = Μέσος χρόνος παραμονής πελατών στο σύστημα

Νόμος Little: $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

Ιδέα απόδειξης 1 (Οικονομική):

Έστω ότι κάθε πελάτης πληρώνει μία χρηματική μονάδα ανά χρονική μονάδα παραμονής του στο σύστημα.

Μέση είσπραξη διαχειρ. ανά χρον. μονάδα (με πληρωμή κατά την άφιξη) $= \underbrace{\#\text{ εισερχ. πελ. ανά χρονική μονάδα}}_{\lambda} \cdot \underbrace{\text{Πληρωμή 1 πελάτη}}_{E[S]}$

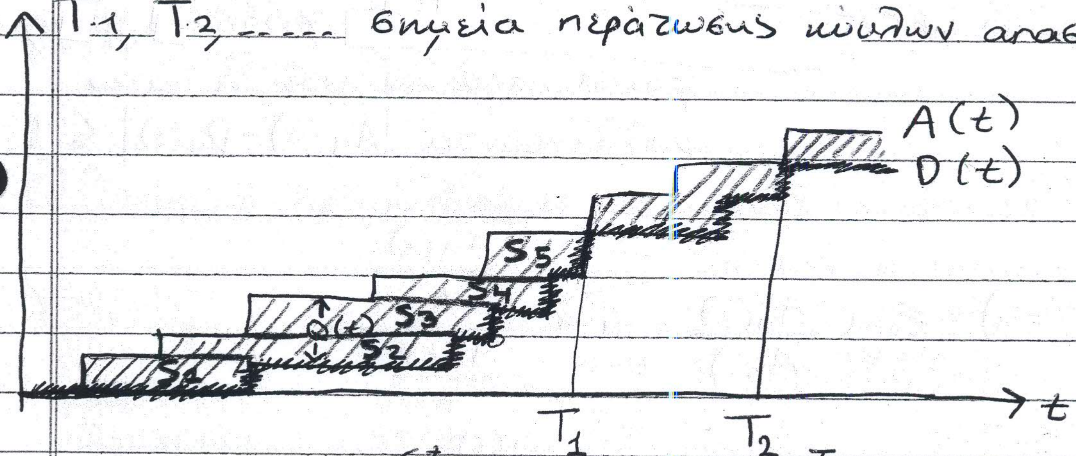
‖

Μέση είσπραξη... (με πληρωμή σε κάθε χρονική μονάδα) $= \underbrace{\#\text{ πελατών}}_{E[Q]}$

3 Ιδέα απόδειξης 2 (Ανανεωτική διαδικασία)

$A(t)$ = # αφίξεων ως τη στιγμή t
$D(t)$ = # αναχωρήσεων " "
$Q(t)$ = # πελατών " "

$S_1, S_2, \dots$ χρόνοι παραμονής πελάτη
$T_1, T_2, \dots$ σημεία περάτωσης κύκλων απασχόλησης



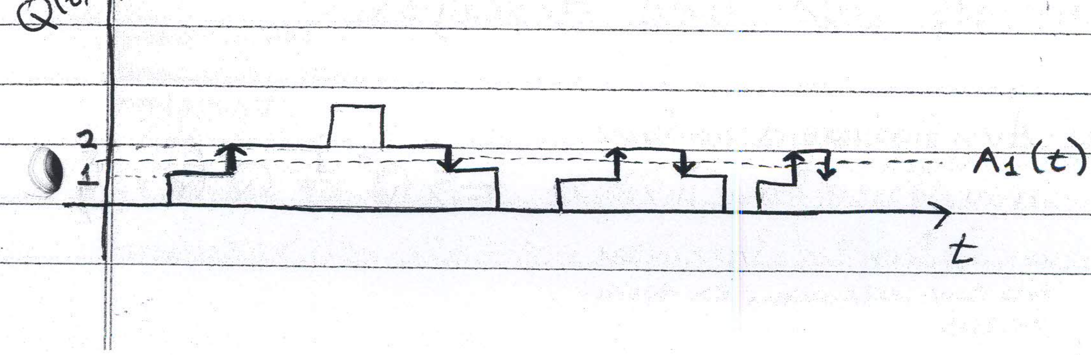
$$E[Q] = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)du}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{T_n} Q(u)du}{T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{A(T_n)} S_i}{T_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{A(T_n)}{T_n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{A(T_n)} S_i}{A(T_n)} = \lambda \cdot E[S]$$

4 Βασικό αποτέλεσμα 3: Ιδιότητα Μεμονωμ. Μεταβάσεων

<u>Θεώρημα:</u>

Αν οι αφίξεις και
οι αναχωρήσεις $\Longrightarrow Q^- \overset{d}{=} Q^+ \quad (r_n = d_n \ \forall n)$
γίνονται μεμονωμένα



Απόδειξη:

$A(t) \doteq \#$ αφίξεων ως τη στιγμή t
$D(t) \doteq \#$ αναχωρήσεων " " " "
$A_n(t) \doteq \#$ αφίξεων " " " " που βλέπουν n πελάτες
$D_n(t) \doteq \#$ αναχωρήσεων " " " " " " " "

Μεμονωμένες μεταβάσεις: Διασχίσεις κάθε οριζόντιας γραμμής προς τα πάνω και προς τα κάτω εναλλάσσονται. $|A_n(t) - D_n(t)| \leq 1$

(βλέπε διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα)

$$r_n = P(Q^- = n) = \lim_{t\to\infty} \frac{A_n(t)}{A(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{A_n(t)}{t}}{\frac{A(t)}{t}}$$

$$d_n = P(Q^+ = n) = \lim_{t\to\infty} \frac{D_n(t)}{A(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{D_n(t)}{t}}{\frac{A(t)}{t}}$$

Όμως, $\lim_{t\to\infty} \frac{A_n(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D_n(t)}{t}$ (από $|A_n(t) - D_n(t)| \leq 1$)

Επίσης,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t}$$ (διότι $\lim_{t\to\infty} \frac{Q(t)}{t} = 0$, $Q(t) = A(t) - D(t)$, αλλιώς η ουρά θα απειριζόταν)

(5) Βασικό αποτέλεσμα 4: Ιδιότητα PASTA

Poisson Arrivals See Time Averages

Θεώρημα: Αν η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson και οι μελλοντικές αφίξεις δεν εξαρτώνται από την κατάσταση του συστήματος $\Longrightarrow Q^- \overset{d}{=} Q$ $(r_n = p_n)$

$$r_n = P(\bar{Q} = n) = \lim_{\substack{t \to \infty \\ \delta_t \to 0}} P\big(Q(t) = n \,|\, \underbrace{A(t, t+\delta_t)}_{\text{άφιξη στο } (t,\, t+\delta_t)}\big)$$

Θ. Bayes

$$= \lim_{\substack{t \to \infty \\ \delta_t \to 0}} \frac{P(Q(t)=n)\, P(A(t,t+\delta_t) \,|\, Q(t)=n)/\delta t}{P(A(t,t+\delta t))/\delta t}$$

διαιρώ με δt

$\to \lambda$

$\to \lambda$ (ρυθμός Poisson)

$$= P(Q = n) = p_n$$

⑥ Βασικές εφαρμογές

1) $E[Q_q] = \lambda E[W]$

$E[Q_q]$: μέσο πλήθος πελατών στο χώρο αναμονής

$E[W]$: μέσος χρόνος αναμονής

Για αυτό το σύστημα η "αναχώρηση" είναι ότι αρχίζεις και εξυπηρετείσαι.

$E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

→ Θεώρημα Little στο σύστημα "χώρος αναμονής"

2) $E[Q_s] = \lambda \cdot E[X]$

$E[Q_s]$: μέσο πλήθος πελατών στο χώρο εξυπηρέτησης

$E[X]$: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης b

→ Θεώρημα Little στο σύστημα "χώρος εξυπηρέτησης"

3) GI/G/c σύστημα

$E[Q_s] = p$

$\|$

μέσο πλήθος απασχολημένων υπηρετών

Πλήθος απασχ. υπηρετών στο GI/G/c $\sim$ Bin(c, πιθανότητα ο υπηρέτης να είναι απασχολημένος)

Άρα: $c \cdot$ πιθανότητα απασχόλησης ενός υπηρέτη $= \rho$

$\Downarrow$

Μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που ένας υπηρέτης είναι απασχολημένος = πιθανότητα απασχόλησης ενός υπηρέτη $= \frac{\rho}{c}$

4) <u>GI/G/1 σύστημα</u>

$E[Q_s] = \rho$

$\Rightarrow 0 \cdot P[Q_s = 0] + 1 \cdot P[Q_s = 1] = \rho$

$\Rightarrow P[Q_s = 1] = \rho$

$\Rightarrow P[Q \geq 1] = \rho$

$\Rightarrow 1 - P[Q = 0] = \rho$

$\Rightarrow p_0 = 1 - \rho$

Σε GI/G/1 σύστημα,

πιθανότητα κενού συστήματος = μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που το σύστημα είναι κενό $= 1 - \rho$.

27/5/2013

Ουρές Αναμονής
Υπολογισμοί

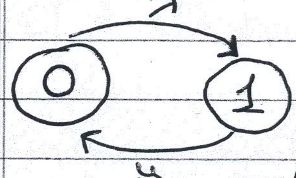
1 Βασικά αποτελέσματα

1) Ευστάθεια $\iff \rho = \lambda \cdot b < c$
2) N. Little : $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$
3) Ιδιότ. μεμον. αφίξ: Μεμον. αφίξεις $\implies Q^- \overset{d}{=} Q^+$
4) Ιδιότητα PASTA: Poisson αφίξεις $\implies Q^- \overset{d}{=} Q$

2 M/M/1/1 ουρά

- Poisson(λ) διαδ. αφίξ
- exp(μ) χρόνος εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης
- Χωρητικότητα 1

$Q(t) = \#$ πελατών



N. Little

$$E[Q] = \lambda \cdot E[S]$$

$$E[S] = P[Q^- = 0] \cdot \frac{1}{\mu} + P[Q^- = 1] \cdot 0$$

$$E[Q] = 0 \cdot P[Q=0] + 1 \cdot P[Q=1] = p_1$$

$$P[Q^- = 0] = r_0 \underset{\text{PASTA}}{=} p_0$$

$$\implies p_1 = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} p_0 = \rho \cdot p_0$$

$1 \cdot \frac{1}{\mu}$: ρυθμός συνωστισμού

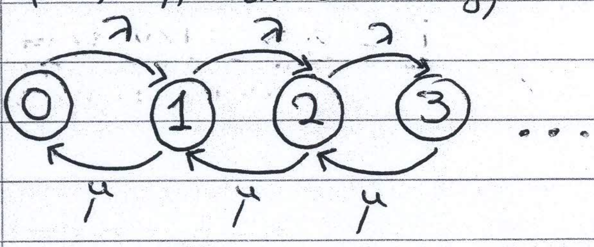
$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \rho \cdot P_0 \\ P_0 + P_1 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \underset{\substack{\| \\ r_0 \\ \| \\ d_0}}{P_0} = \frac{1}{1+\rho}, \quad \underset{\substack{\| \\ r_1 \\ \| \\ d_1}}{P_1} = \frac{\rho}{1+\rho}$$

και $E[Q] = \frac{\rho}{1+\rho}$, $E[S] = \frac{1}{\mu(1+\rho)}$

③ M/M/1 ουρά ← Μπορούμε να βρούμε τα πάντα για αυτή!

- Poisson(λ) διαδ. αφιξ
- exp(μ) χρ. εξυπ
- 1 υπηρέτης
- Χωρητικότητα $= \infty$
- FCFS

$Q(t) = \#$ πελ. τη στιγμή t.



$\rho = \lambda \cdot \frac{1}{\mu}$

<u>Συνήθης διαδικασία...</u>

$E[Q] = ;$ $\qquad E[S] = ;$

1) N. Little

2) Δεσμεύω στο πόσοι πελάτες ήταν παρόντες κατά την άφιξή μου.

N. Little $\quad E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

$$E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} P(Q^- = n)\, \underbrace{E[S \mid Q^- = n]}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r_n \overbrace{(n+1) \cdot \frac{1}{\mu}}$$

$$= \frac{1}{\mu} \cdot E[Q^- + 1]$$

$$= \frac{1}{\mu}\left(E[Q^-]+1\right)$$

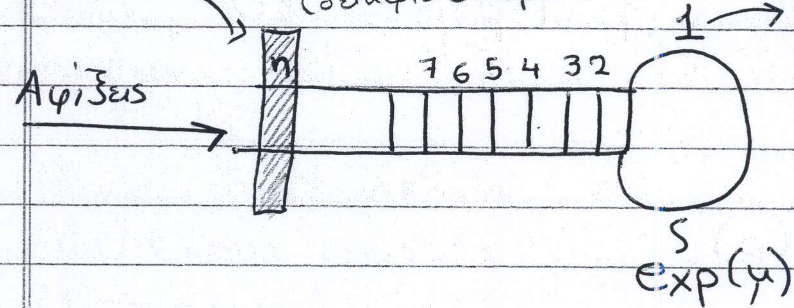
PASTA

$$E[Q^-] \overset{d}{=} E[Q] \quad = \frac{1}{\mu}\left(E[Q]+1\right)$$

Άρα
$$\left.\begin{aligned} E[Q] &= \lambda \cdot E[S] \\ E[S] &= \frac{E[Q]+1}{\mu} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}, \qquad E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

στη n-οστή θέση θα υπάρχει είτε <u>ένας</u> είτε <u>κανένας</u> πελάτης (δείκτρια συνάρτηση)

Θέση 1, εκεί όπου ο υπηρέτης εξυπηρετεί



$P_0 = 1-\rho$ (από Ν. Little στο χώρο εξυπ. (θέση 1) - μάλιστα ισχύει πιο γενικά στο GI/G/1)

Ν. Little στο σύστημα "n-οστή θέση"

Για να υπάρχει πελάτης στη n-οστή θέση πρέπει στο σύστημα να υπάρχουν τουλάχιστον n-πελάτες.

$E[\#\text{ πελ στην n-οστή θέση}] = P(Q \geq n)$

Ρυθμός αφίξεων στη n-οστή θέση $= \lambda P[Q^- \geq n-1]$

$E[\text{χρόνος παραμονής πελάτη στη n-οστή θέση}] = 1/\mu$

<u>Θ. Little</u>:

$$P(Q \geq n) = \lambda P[Q^- \geq n-1] \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow \sum_{i \geq n} p_i = \rho \sum_{i \geq n-1} r_i \,, \quad n \geq 1$$

Αφαιρώντας για $n, n+1$

$$\left(\sum_{i \geq n+1} p_i = \rho \sum_{i \geq n} r_i \quad , \quad \sum_{i \geq n} p_i = \rho \sum_{i \geq n-1} r_i \right)$$

$$p_n = \rho\, r_{n-1} \ , \ n \geq 1$$

$$\xrightarrow{\text{PASTA}} p_n = \rho \cdot p_{n-1} \ , \ n \geq 1$$

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = 1-\rho \\ p_n = \rho \cdot p_{n-1} \ , \ n \geq 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow p_n = (1-\rho)\rho^n \ , \ n \geq 0$$

Ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή!

Άρα $Q \sim \mathrm{Geom}(\rho)$

$$Q^- \overset{d}{=} Q^+ \overset{d}{=} Q$$

S = χρόνος παραμονής πελατών

$$\tilde{F}_S(s) = E[e^{-sS}]$$

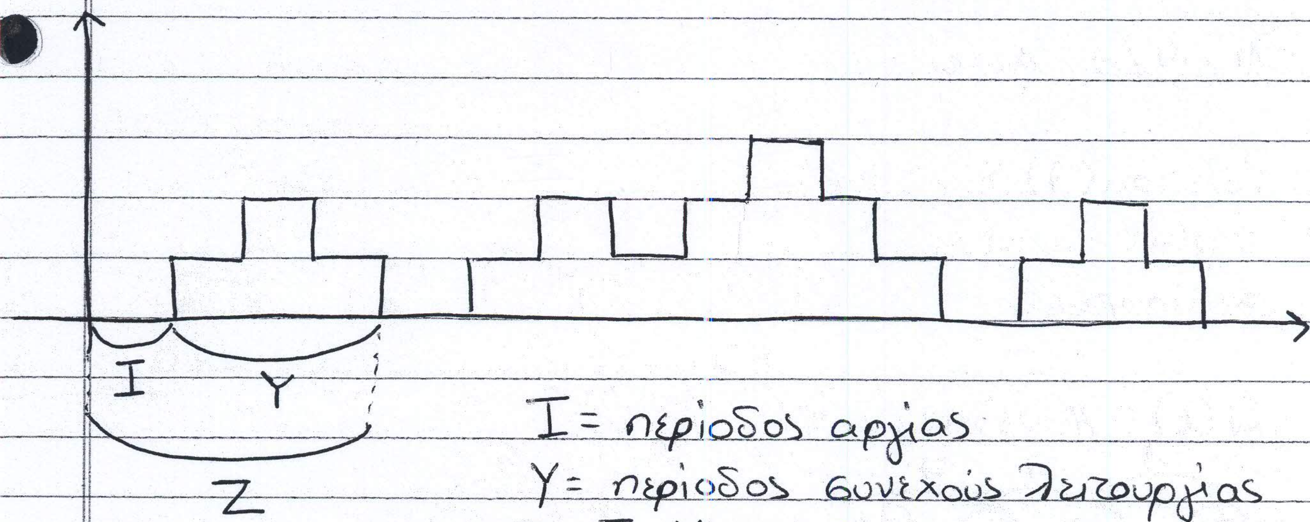
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(Q^- = n)\, E[e^{-sS} \mid Q^- = n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n \underbrace{\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1}}_{\text{μετασχ. L-S}} \text{ της } \mathrm{Gamma}(n+1, \mu)$$

$$= \frac{(1-\rho)\mu}{\mu+s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho\mu}{\mu+s}\right)^n$$

$$= \frac{(1-\rho)\mu}{\mu+s} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\rho \cdot \mu}{\mu+s}}$$

$$= \frac{(1-\rho)\mu}{s+(1-\rho)\mu}$$ που είναι ο μετασχ L-S της $\mathrm{Exp}(\mu(1-\rho))$



I = περίοδος αργίας
Y = περίοδος συνεχούς λειτουργίας
$Z = I + Y$: κύκλος απασχόλησης ή λειτουργίας του συστήματος

Θεωρώ διαδικασία αμοιβής με τιμές:
0 → κενό σύστημα
1 → απασχ. υπηρ

Από ΣΑΘΑ:

$1-\rho = P_0$ = Μακροπρόθεσμο ποσοστό κενού συστήματος

$$= \frac{E[I]}{E[Z]}, \quad E[I] = \frac{1}{\lambda}$$

Άρα $E[I] = \frac{1}{\lambda}$

$$E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$$

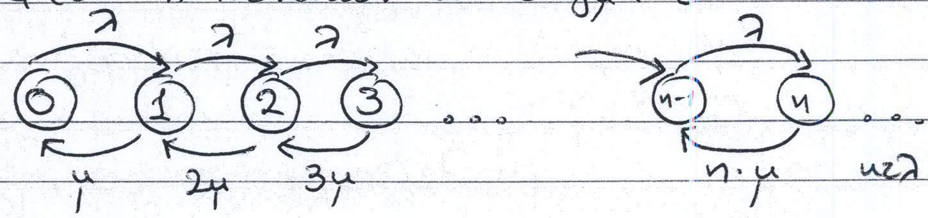
$$E[Y] = E[Z] - E[I] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = E[S]$$

! Ο μέσος χρόνος συνεχ. λειτουργ. αυτού του συστήματος είναι όσο ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη.

④ M/M/∞ ουρά

- Poisson(λ) διαδ. αφιξ
- exp(μ) χρ. εξυπ
- ∞ υπηρέτες

$Q(t) = \#$ πελατών τη στιγμή t



$E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

Επίσης $S \sim exp(\mu)$

$\Rightarrow E[S] = \frac{1}{\mu}$

$\Rightarrow E[Q] = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$

Αποδεικνύεται ότι: $p_n = d_n = r_n = e^{-\rho} \cdot \frac{\rho^n}{n!}$, $n = 0, 1, \ldots$

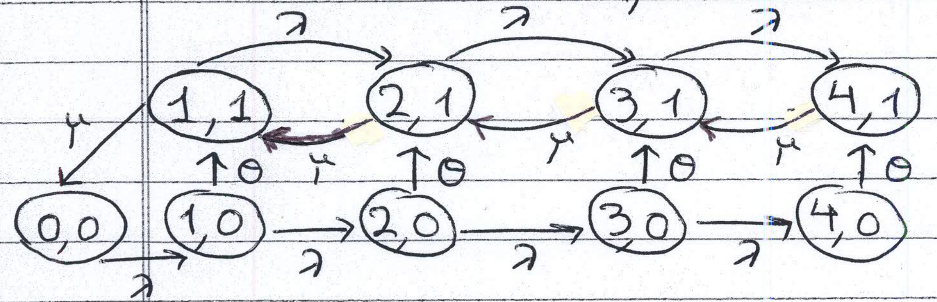
Άρα.. $Q \sim$ Poisson(ρ).

⑤ M/M/1 ουρά με χρόνους εκκίνησης

- Poisson(λ) διαδ. αφιξ
- exp(μ) χρόνοι εξυπ
- 1 υπηρ
- ∞ χωρητικότητα
- FCFS
- Όταν το σύστημα αδειάσει, ο υπηρέτης απενεργοποιείται. Όταν έρθει ο πρώτος πελάτης, τότε μπαίνει σε λειτουργία ο χρόνος εκκίνησης (προθέρμανσης) exp(θ) και μετά αρχίζει κανονικά η εξυπηρέτηση.

$Q(t) = \#$ πελ $\qquad (Q(t), I(t))$

$I(t) =$ κατάσταση υπηρέτη



$E[Q] = ?$ $\qquad E[S] = ?$

N. Little: $E[Q] = \lambda E[S]$

Επίσης $\cancel{E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} P(Q^- = n) E[S \mid Q^- = n]}$

Άρα κάνω μια πιο αναλυτική δέσμευση

$$\Rightarrow E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} P(Q^- = n, I^- = 0) \overbrace{E[S \mid Q^- = n, I^- = 0]}^{\frac{1}{\theta} + \frac{n+1}{\mu}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} P(Q^- = n, I^- = 1) \underbrace{E[S \mid Q^- = n, I^- = 1]}_{\frac{n+1}{\mu}}$$

Δε μου αρκεί να ξέρω πόσους πελάτες βρήκα μπαίνοντας στο σύστημα, αλλά και σε τι κατάσταση βρήκα τον υπηρέτη → ενεργ / → ανενεργ

! $\sum_{n,i} p(n,i) g(n,i) = E[g(Q^-, I^-)]$

$$\Rightarrow E[S] = \frac{E[Q^-]+1}{\mu} + \underbrace{P(I^- = 0)}_{\substack{1 - (\text{πιθ. αποσχ. υπηρέτη}) \\ \parallel \\ 1-\rho}} \cdot \frac{1}{\theta}$$

πιθανότητα μπαίνοντας να βρει το σύστημα απενεργ. όπου θα περιμένω $\frac{1}{\theta}$, και ούτως ή άλλως θα περιμένω να εξυπ όσοι είναι παρόντες και εγώ (όπου ο καθένας θα περιμένει $1/\mu$).

Άρα: $E[Q] = \lambda E[S]$

$$E[S] = (1-\rho)\frac{1}{\theta} + \frac{E[Q]+1}{\mu}$$

$$\Downarrow$$

$$E[Q] = \frac{\lambda(1-\rho)}{\theta} + \rho(E[Q]+1)$$

$$\Downarrow$$

$$E[Q] = \frac{\lambda}{\theta} + \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$E[S] = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Τελικά όλοι πληρώνουν $1/\theta$ παραπάνω...

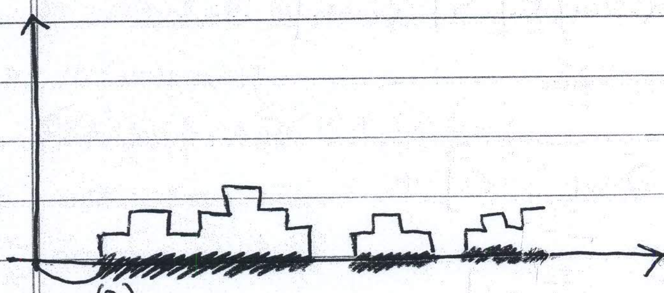
(6) Επέκταση σε συστήματα με γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης

M/G/1/1 — Εντελώς ανάλογο με M/M/1/1

M/G/∞ — Εντελώς ανάλογο με M/M/∞

M/G/1
- Poisson(λ) διαδ. αφ.ξ
- Γενικοί χρόνοι εξυπηρ. $X \sim G(x)$
- 1 υπηρέτης
- ∞ χωρητικότητα
- FCFS

— Πιο δύσκολο



$$E[Q] = \lambda E[S]$$

$$E[S] = \underbrace{P[Q^- = 0]}_{1-\rho}\, \overbrace{E[S \mid Q^- = 0]}^{E[X]} + P[Q^- \geq 1]\, \underbrace{E[S \mid Q^- \geq 1]}_{E[X_e] + E[Q^- \mid Q^- \geq 1] E[X]}$$

Τα μαγειρεύουμε και...

$$\Longrightarrow E[Q] = \lambda(1-\rho) E[X] + \lambda\rho E[X_e] + \lambda E[\underbrace{Q^- \cdot 1[Q^- \geq 1]}_{= Q^- \overset{d}{=} Q}] E[X]$$

X_e είναι ο υπολειπόμ. χρόνος ανανέωσης σε ανανεωτ. διαδ. με ενδιάμ. χρόνους $\sim G(x)$

$$E[Q] = \lambda(1-\rho) E[X] + \lambda\rho E[X_e] + \rho E[Q]$$

$$\Rightarrow E[Q] = \lambda E[X] + \frac{\lambda\rho E[X_e]}{1-\rho}$$

$$E[S] = E[X] + \frac{\rho}{1-\rho} E[X_e]$$

$$\boxed{E[X_e] = \frac{E[X^2]}{2E[X]}}$$