10/4/2013

Ανανεωτική Θεωρία

① Ολοκλήρωμα L-S

Αν έχουμε X τμ με σ.κ $F(x)$, X μεικτή τμ με σ.π $p(x)$, σ.π.π $f(x)$.

$$P(X \in B) = \sum_{x \in B} p(x) + \int_B f(x)\,dx$$

πεπερασμένα ή το πολύ αριθμήσιμα σημεία.

και έστω $g(x)$ συνάρτηση. Τότε:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF(x) = \begin{cases} \mathrm{I}, & \text{τμ διακριτή} \\ \mathrm{II}, & \text{τμ συνεχής} \\ \mathrm{I}+\mathrm{II}, & \text{τμ μεικτή} \end{cases}$$

$$= \underbrace{\sum_x g(x)p(x)}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx}_{\mathrm{II}}$$

② Μετασχηματισμός L-S

X τμ με σ.κ $F(x)$, τότε:

$$\tilde{F}_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx}\,dF(x)$$

$$= E[e^{-sX}]$$

③ Βασικά ζεύγη $F(t)$ και $\tilde{F}(s)$

<u>Συνάρτηση</u> — <u>Μετασχηματισμός L-S</u>

$aF(t)+bG(t) \longleftrightarrow a\tilde{F}(s)+b\tilde{G}(s)$

$(F*G)(t) \longleftrightarrow \tilde{F}(s)\tilde{G}(s)$

$F(t)=t,\ t\geq 0 \longleftrightarrow \frac{1}{s}$

$F(t)=1-e^{-\lambda t},\ t\geq 0 \longleftrightarrow \frac{\lambda}{\lambda+s}$

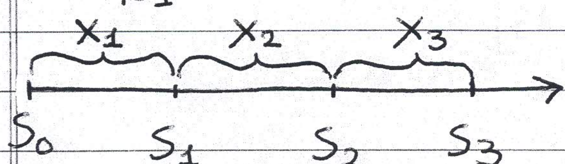
④ Ορισμοί

→ παριστάνουν ένα χρόνο

$X_1, X_2, \dots$ ανεξ, ισον τμ ≥ 0 με σ.κ $G(t)$, τότε:

$S_0=0$

$S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i,\ n\geq 1$



→ πότε συμβαίνουν τα γεγον.

η $\{S_n : n\geq 0\}$ λέγεται ανανεωτική ακολουθία

και η $\{N(t)\}$ με $N(t)=\sup\{n\geq 0: S_n \leq t\}$

= # γεγονότων μέχρι το t

λέγεται ανανεωτική διαδικασία.

Η συνάρτηση $M(t)=E[N(t)]$ λέγεται ανανεωτική συνάρτηση.

⑤ Βασικοί υπολογισμοί

$X_i \sim G(t)$ σ.κ

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \leq t)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\right)$$

$$= (G * G * G * \ldots * G)(t)$$

Στην Poisson επειδή είχαμε exp, αυτή η συνέλιξη υπολογιζόταν. Εδώ.... σκούραίνουν τα πράγματα.

$$= G^{(*n)}(t)$$

→ (G συνέλιξη) n φορές

! Υπενθύμιση: $X \sim G$, $Y \sim F$

$$(G*F)(t) = \int_0^{\infty} G(t-x)\,dF(x)$$

← κανονικά $\int_{-\infty}^{\infty}$ αλλά έχω τη ≥ 0.

$$\| $$

$$P(X+Y \leq t) = \int G(t-x)\,dF(x)$$

$$p(t) = P(N(t)=n) = P(S_n \leq t < S_{n+1})$$

$$= P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$$

$$= G^{(*n)}(t) - G^{(*n+1)}(t)$$

$$M(t) = E[N(t)] = E\Big[\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{1\cdot\{S_n \leq t\}}^{\text{Δείκτρια συνάρτηση}}\Big]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} G^{(*n)}(t)$$

Άρα:

$$F_{S_n}(t) = G^{(*n)}(t)$$

$$P_n(t) = P(N(t)=n) = G^{(*n)}(t) - G^{(*n+1)}(t), \quad n \geq 0$$

$$P_0(t) = P(N(t)=0) = 1 - G(t)$$

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{(*n)}(t)$$

Ο μετασχ. L-S τις συνελίξεις τις πάει σε γινόμενα! (Βολεύει)

Θεωρούμε ότι $G^{(*0)} = 1$

(6) Αντίστοιχοι μετασχ L-S

$$\tilde{F}_{S_n}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF_{S_n}(t) = (\tilde{G}(s))^n$$

$$\tilde{P}_n(s) = \int_0^\infty e^{-st} dP_n(t)$$

$$= \tilde{G}(s)^n - \tilde{G}(s)^{n+1}, \quad n \geq 1$$

ή

$$= 1 - \tilde{G}(s), \quad n = 0$$

$$\tilde{M}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dM(t) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

Επίσης:
Αν γνωρίζω τη $M(t)$ βρίσκω και τη $G(t)$.

(7) Υπολογισμοί $F_{S_n}(t)$, $P_n(t)$, $M(t)$ για συγκεκριμένη $G(t)$

Βήμα 1ο: $\tilde{G}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG(t)$

Βήμα 2ο: $\tilde{F}_{S_n}(s)$, $\tilde{P}_n(s)$, $\tilde{M}(s)$

Βήμα 3ο: Αντιστροφή των μετασχηματισμών με:

$$t, t \geq 0 \longleftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0 \longleftrightarrow \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

(8) Η $M(t)$ προσδιορίζει τη $G(t)$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{M}(s) - \tilde{M}(s)\tilde{G}(s) = \tilde{G}(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\tilde{G}(s) = \frac{\tilde{M}(s)}{1+\tilde{M}(s)}}$$

→ Νόμος μεγάλων αριθμών
→ Κεντρικό οριακό Θεώρημα.

(9) Υπενθυμίσεις από Θ. Πιθανοτήτων

ΝΜΑ: $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ, ισον με $E[X_i]=\mu$

$$\Longrightarrow P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \mu\right) = 1$$

ΚΟΘ: $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ, ισον με $E[X_i]=\mu$, $Var[X_i]=\sigma^2$

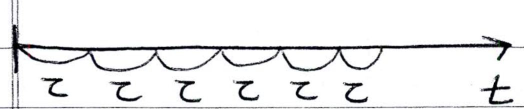
$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x)$$ (συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$)

(10) Οριακά Θεωρήματα στην Ανανεωτική Θεωρία (Δε μας βοηθούν πολύ υπολογιστικά)

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ, ισον, ≥ 0 τμ ενδιάμεσων χρόνων ανανεωτικής διαδικασίας

$\{N(t)\}$ με $E[X_i]=\tau$, $Var[X_i]=\sigma^2$.

ΝΜΑ: $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau} \Longrightarrow \boxed{P\left(\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}\right) = 1}$



$N(t) \simeq 1$

$\frac{N(t)}{t} \simeq \frac{1}{\tau}$

ΚΟΘ: $$\boxed{\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\tau}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\tau^3}}} \le x\right) = \Phi(x)}$$

(Για απόδειξη του ΚΟΘ, βλ τις σημειώσεις 2011-2012, δε θα την κάνουμε τώρα γιατί είναι πολύ τεχνική...)

Απόδειξη ΝΜΑ:

$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$ με πθ 1

$$\Longrightarrow \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \quad \text{με πθ 1}$$

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{ΝΜΑ, με πθ 1}} \tau$$

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \underbrace{\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}} \xrightarrow{\text{με πθ 1}} \tau$$

Άρα $\lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \tau \Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}$ με πθ 1

(11) Παράδειγμα:

Έστω ανανεωτ. διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων

$$G(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (\exp(\lambda))$$

$$\tilde{G}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

$$\tilde{F}_{S_n}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$$

$$\Longrightarrow F_{S_n}(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$\tilde{P}_n(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n - \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-\frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\lambda}{s}$$

$$\Longrightarrow M(t) = \lambda t,\ t \geq 0$$

12 Παράδειγμα:

Έστω αναν. διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιαμ. χρόνων $G(t)$ Gamma$(2,\lambda)$

$M(t) = ?$

$$\tilde{G}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dG(t)$$

α' τρόπος, αντικαθιστώ και κάνω πράξεις

αλλιώς με L-S

$$= \int_0^\infty e^{-st} \cdot \frac{\lambda^2}{(2-1)} t^{2-1} e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2 \quad \left(\text{Gamma}(2,\lambda) = Exp(\lambda) * Exp(\lambda)\right)$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} = \frac{\frac{\lambda^2}{(\lambda+s)^2}}{1-\frac{\lambda^2}{(\lambda+s)^2}} = \frac{\lambda^2}{(\lambda+s)^2-\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{s(s+2\lambda)} =$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2\lambda} = (*)$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις, ο μετασχ. είναι ρητός και κάνω ανάλυση σε απλά κλάσματα.

Άρα: $$\frac{\lambda^2}{s(s+2\lambda)} = A \cdot \frac{1}{s} + B \cdot \frac{1}{s+2\lambda}$$

$$\overset{\cdot s}{\Longrightarrow} \frac{\lambda^2}{s+2\lambda} = A + B \cdot \frac{s}{s+2\lambda}$$

$$\overset{s=0}{\Longrightarrow} \boxed{\frac{\lambda}{2} = A}$$

Επίσης $$\frac{\lambda^2}{s(s+2\lambda)} = A\cdot\frac{1}{s} + B\cdot\frac{1}{s+2\lambda}$$

$$\xRightarrow{\cdot(s+2\lambda)} \frac{\lambda^2}{s} = A\cdot\frac{s+2\lambda}{s} + B$$

$$\xRightarrow{s=-2\lambda} \boxed{-\frac{\lambda}{2} = B}$$

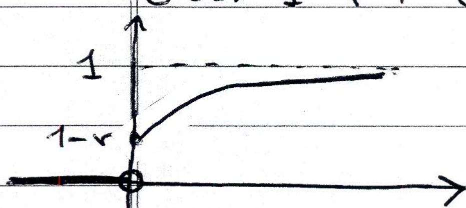
$$(*) = \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2\lambda}{s+2\lambda}$$

$$\xRightarrow[\text{L-S}]{\text{αντιστρ. μετασχ.}} \boxed{M(t) = \frac{\lambda}{2}\cdot t - \frac{1}{4}\left(1-e^{-2\lambda t}\right), \quad t\geq 0}$$

13 Παράδειγμα:

Έστω $\{N(t)\}$ αναν. διαδικασία με σ.κ ενδιάμεσων χρόνων

$$G(t) = 1-r+r(1-e^{-\lambda t}), \quad t\geq 0$$



$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{με πθ } 1-r \\ \exp(\lambda), & \text{με πθ } r \end{cases}$$

$$\tilde{G}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dG(t)$$

$$= e^{-s\cdot 0}\cdot(1-r) + \int_0^\infty e^{-st}\cdot r\lambda e^{-\lambda t}\,dt$$

$$= (1-r) + r\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s}$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} = \frac{(1-r)+r\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s}}{r-r\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s}}$$

$$= \frac{(1-r)(\lambda+s)+r\lambda}{\cancel{r\lambda}+rs-\cancel{r\lambda}}$$

$$= \frac{\lambda + s - \cancel{r\lambda} - rs + \cancel{r\lambda}}{rs}$$

$$= \frac{\lambda}{r} \cdot \frac{1}{s} + \frac{(1-r)}{r}$$

$$\Longrightarrow \boxed{M(t) = \frac{\lambda}{r} \cdot t + \frac{1-r}{r} \quad {\scriptstyle t \geq 0}}$$

15/4/2013

Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα
Ανανεωτική Εξίσωση - Λύση
Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα

① Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα (ΣΑΘ)

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. με $X_1, X_2, \dots$ ενδ. χρόνοι $\sim G(x)$, $E[X_i] = \tau$

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} \frac{\overbrace{E[N(t)]}^{=M(t)}}{t} = \frac{1}{\tau}$$

② Στοιχ. Αναν. Θεωρ. με Αμοιβές (ΣΑΘΑ)

$R(t)$ = πόση αμοιβή συσσωρεύτηκε μέχρι τη χρονική στιγμή t.

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. με $X_1, X_2, \dots$ ενδ. χρόνοι $\sim G(x)$, $E[X_i] = \tau$ και $\{R(t)\}$ στοχ. διαδ. "αμοιβών" ώστε αν θέσω

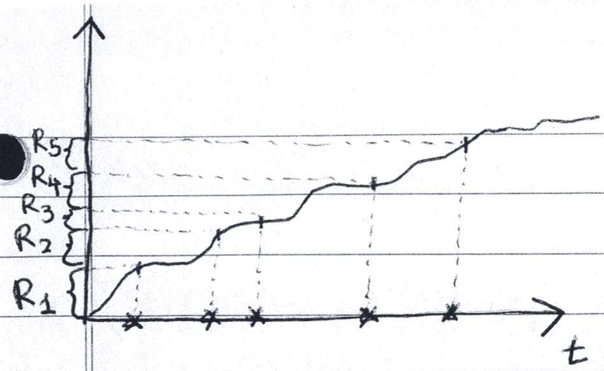
$$R_n = \underbrace{R(S_n) - R(S_{n-1})}_{\text{αμοιβή κατά τον } X_n \text{ χρόνο}} \qquad \left(S_0 = 0,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \geq 1\right)$$

τότε $(X_1, R_1), (X_2, R_2), (X_3, R_3)$ είναι ανεξ. ισον. τότε

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_i]}{E[X_i]} = \frac{r}{\tau}$$

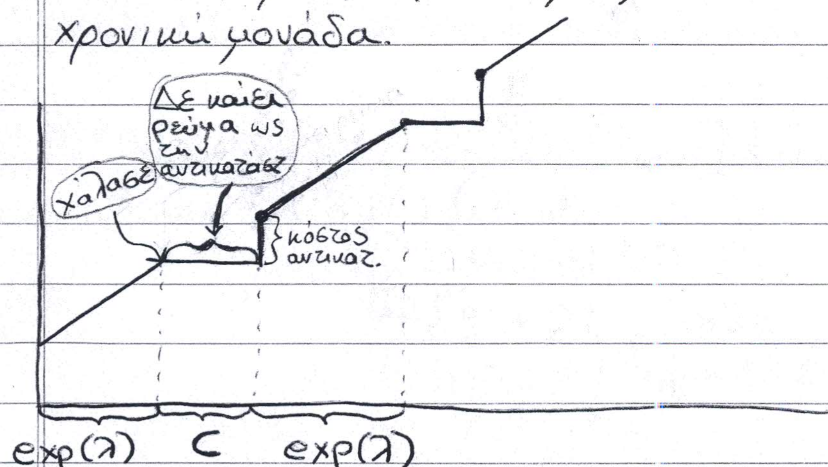
(Δες και σχήμα)

Κάθε φορά που επαναλαμβάνεται ένα στοχ. περιοδικό φαινόμενο η μέση αμοιβή είναι ίδια.



③ Παράδειγμα

Ένα μηχάνημα έχει χρόνο λειτουργίας $\sim \exp(\lambda)$.
Όταν χαλάσει αντικαθίσταται από καινούριο.
Χρόνος αντικατάστασης σταθερός $= C$
Κόστος αντικατάστασης $= K$
Όσο λειτουργεί το μηχάνημα καίει ρεύμα με ρυθμό
1 μονάδα (ρευμ.) / χρον. μονάδα.
Κόστος ρεύματος ανά μονάδα $= h$
Ποιο το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος λειτουργίας ανά χρονική μονάδα.



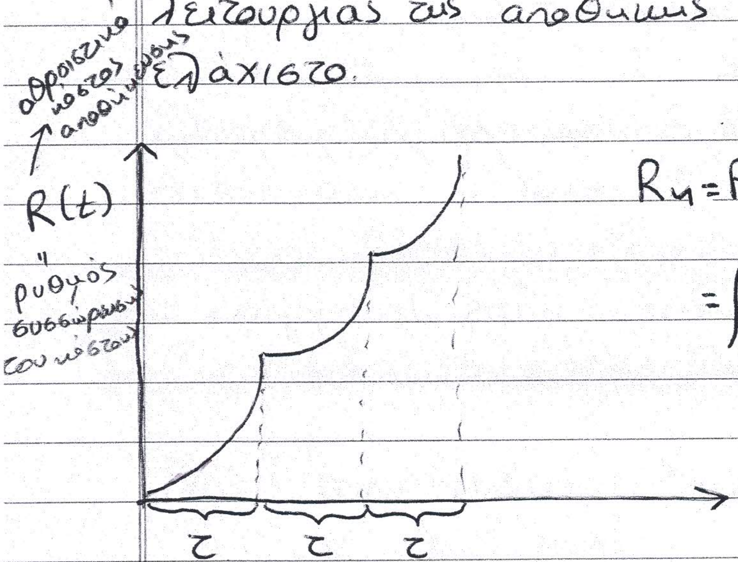
Μας αρκούσε να δούμε τι συμβαίνει σε έναν κύκλο του φαινομένου (Περιοδικότητα)

$R(t) =$ Κόστος ως τη στιγμή t
(X_n, R_n) ανεξ. ισον
$R_n = K + h X_n$

$$\Longrightarrow \xrightarrow{\text{ΣΑΘΑ}} \lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_i]}{E[X_i]} = \frac{K + h\cdot\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + C}$$

④ Παράδειγμα

Σε μια αποθήκη φθάνουν αντικείμενα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson $\{\Lambda(t)\}$ ρυθμού λ.
Κάθε τ χρονικές μονάδες τα αντικείμενα απομακρύνονται με ένα φορτηγό με κόστος K ανά φορά.
Κάθε αντικείμενο έχει κόστος φύλαξης ανά χρονική μονάδα h.
Να υπολογιστεί το τ ώστε το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος λειτουργίας της αποθήκης ανά χρονική μονάδα να είναι ελάχιστο.



$$R_n = R(S_n) - R(S_{n-1}) = \int_0^{X_n=\tau} h\Lambda(u)\,du + K$$

$$\Downarrow$$

$(X_1,R_1),(X_2,R_2),\ldots$ ανεξ., ισόνομες

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} \overset{\text{ΣΑΘΑ}}{=} \frac{E[R_i]}{E[X_i]} = \frac{K + \frac{\lambda h \tau^2}{2}}{\tau}$$

διότι $E[R_i] = \int_0^{\tau} h\lambda u\,du + K$

$$= K + \frac{\lambda h \tau^2}{2}$$

$$\frac{dC(\tau)}{d\tau} = -\frac{K}{\tau^2} + \frac{\lambda h}{2} = 0 \Longrightarrow \boxed{\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{\lambda h}}}$$

$$\frac{d^2C(\tau^*)}{d\tau^2} = \frac{2K}{\tau^{*3}} > 0$$ (άρα όντως τ^* σημείο ελαχίστου)

⑤ Ανανεωτική εξίσωση

Όταν έχω $\{N(t)\}$ αναν. διαδ με καταν ενδ. χρόνων $G(t)$, δεσμεύοντας στο χρόνο του $1^{ου}$ γεγονότος (S_1), δημιουργείται εξίσωση της μορφής

$$H(t) = D(t) + \underbrace{\int_0^t H(t-u)\,dG(u)}_{(H*G)(t)}$$

$H(t)$: άγνωστη συνάρτ. $D(t)$: γνωστή συνάρτ. $(H*G)(t)$: γνωστή σ.κ

⑥ Παράδειγμα 1

$\{N(t)\}$ για αναν. διαδ με καταν. ενδ. χρόνων $G(t)$ και έστω $M(t)=E[N(t)]$ η αναν. συνάρτηση. Έχω:

$$M(t)=E[N(t)]=\int_0^\infty E[N(t)/X_1=x]\,dG(x)$$
$$\overset{*}{=}\int_0^t (1+M(t-x))\,dG(x)$$
$$=\int_0^t dG(x)+\int_0^t M(t-x)\,dG(x)$$
$$=G(t)+\int_0^t M(t-x)\,dG(x)$$

! Όμως:

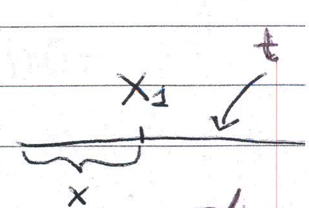
$$E[N(t)|X_1=x] \overset{*}{=} \begin{cases} 0 &, t<x \\ 1+\underbrace{E[N(t-x)]}_{=M(t-x)} &, t\geq x \end{cases}$$

Άρα η $M(t)$ ικανοπ. την αναν. εξίσωση με
$H(t)=M(t)$
$D(t)=G(t)$

Παράδειγμα 2

$$S(t)=E[S_{N(t)+1}]=\int_0^\infty E[S_{N(t)+1}|X_1=x]\,dG(x)$$

! Όμως: $$E[S_{N(t)+1}|X_1=x]=\begin{cases} x &, t<x \\ x+E[S_{N(t-x)+1}] &, t\geq x \end{cases}$$



Άρα: $S(t) = \int_0^t (x + S(t-x))\,dG(x) + \int_t^\infty x\,dG(x)$

$$= \underbrace{\int_0^\infty x\,dG(x)}_{\tau = E[X_i]} + \int_0^t S(t-x)\,dG(x)$$

Άρα η $S(t)$ ικανοποιεί αναν. εξισ. με $H(t) = S(t)$, $D(t) = \tau$ σταθερή

⑦ Στόχοι

1) Λύση της $H(t) = D(t) + (H * G)(t)$

2) $\lim_{t \to \infty} H(t) = ?$

⑧ Λύση της Αναν. Εξίσωσης

$H(t) = D(t) + (H * G)(t)$ Αναν. εξ

$\Downarrow$ L-S

$\tilde{H}(s) = \tilde{D}(s) + \tilde{H}(s)\tilde{G}(s)$

$\Downarrow$

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{D}(s)}{1 - \tilde{G}(s)}$$

• Υπενθύμιση:

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1 - \tilde{G}(s)}$$

$$= \tilde{D}(s)\left(1 + \frac{\tilde{G}(s)}{1 - \tilde{G}(s)}\right)$$

$$= \tilde{D}(s) + \tilde{D}(s)\tilde{M}(s)$$

$\Longrightarrow H(t) = D(t) + (D * M)(t)$

$$= D(t) + \int_0^t D(t-\omega)\,dM_G(\omega)$$ Λύση αναν. εξισ.

$\uparrow$

Ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί στη $G(t)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} H(t) = D(t) + (H * G)(t) & \text{Αναν. εξίσωση} \\ H(t) = D(t) + (D * M_G)(t) & \text{Λύση αναν. εξίσωσης} \end{array}}$$

9) Όριο της λύσης της αναν. εξίσωσης

$$\lim_{t \to \infty} H(t) = \lim_{t \to \infty} \left(D(t) + \int_0^t D(t-x)\, dM_G(x) \right)$$

$M(x) \simeq \frac{x}{\tau}$

αυτά θα πεθάνει αφού η ουρά των $\int$ πάει στο μηδέν (συνθήκη 2)

10) Βασικό ανανεωτικό Θεώρημα (ΒΑΘ)

Δύσκολη η απόδειξή του....

Έστω η αναν. εξίσωση $H(t) = D(t) + (H * G)(t)$. Αν:

1) $G(t)$ είναι συνεχής (ή γενικότερα η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι απεριοδική δηλ. $\nexists\, d : \sum_k P(X_i = kd) = 1$)

2) $D(t)$ γράφεται σαν διαφορά μη αρνητικών, μονότονων συναρτ.

3) $\int_0^\infty |D(t)|\, dt < \infty$

Τότε: $\lim_{t \to \infty} H(t) = \dfrac{\int_0^\infty D(t)\, dt}{E[X_i]}$

$E[X_i]$ = Μέσος ενδιάμεσος χρόνος. $= \tau$

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα I

Μάθημα 16ο:

Εφαρμογές των Βασικών Αποτελ. της Αναν. Θεωρίας

① ΣΑΘΑ

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ., $\{R(t)\}$ στοχ. διαδ.
ώστε (X_n, R_n), $n \geq 1$ ανεξ. ισον.

X_n: $n^{ος}$ ενδιαμ. χρόνος αναν.
R_n: αντίστοιχη αμοιβή

$\Downarrow$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_n]}{E[X_n]}$$

Μακροπρόθ. μέση αμοιβή ανά χρον. μονάδα

② Αναν. εξισ. - λύση της

$$\underset{\text{Αγν. συναρτ.}}{H(t)} = \underset{\text{γν. συναρτ.}}{D(t)} + \overbrace{(H * \underset{\text{γν. σ.κ.}}{G})(t)}^{\int_0^t H(t-u)\,dG(u)} \quad \rightarrow \text{Αναν. Εξισ.}$$

$\Downarrow$

$$H(t) = D(t) + (D * M_G)(t) \quad \rightarrow \text{Λύση Αναν. Εξισ.}$$

M_G: Αναν. συν. που αντιστοιχεί στην $G(t)$

Οικονομική Ερμηνεία της αναν. εξισ. - λύση

Έχω γεγ. και τη στιγμή 0

Έστω ότι κάθε γεγονός της αναν διαδ. έχει επίδραση $D(t)$ t χρονικές μονάδες αργότερα

$H(t)$: συνολική επίδραση από όλα τα γεγον. τη χρ. στιγμή t

$G(t)$: σ.κ. των ενδιαμ. χρ. της αναν. διαδ.

<u>$1^{ος}$ Τρόπος:</u>

συνολ. επιδρ. τη στιγμή t = επιδρ. από το $0^{ο}$ γ. t + επιδρ. από το $1^{ο}$ γ. t + επιδρ. από το $2^{ο}$ γ. + ...

$$H(t) = D(t) = \int_0^t D(t-u)\,dG(u) + \int_0^t D(t-u)\,dG^{(*2)}(u) + \int_0^t D(t-u)\,dG^{(*3)}(u) + \ldots$$

$$= D(t) + \int_0^t D(t-u)\,dM_G(u)$$

$$M_G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{(*n)}(t)$$

<u>$2^{ος}$ Τρόπος:</u>

συνολ. επιδρ. τη στιγμή t = επιδρ. από το $0^{ο}$ γεγ. τη στιγμή t + επιδρ. από τα υπολ. τη στιγμή t

$$H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$$

③ <u>ΒΑΘ</u>

Έστω η αναν. εξίσ. $H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$

με i) $D(t)$ γράφεται ως διαφορά <u>μη-αρνητ.</u>, <u>μονότονων</u> συναρτ.

ii) $\int_0^{\infty} |D(t)|\,dt < \infty$

Τότε:

$G(t)$ απεριοδική $\Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} H(t) = \dfrac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\tau}$

Μέση τιμή της $G(t)$

$G(t)$ περιοδική $\Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} H(x+kd) = \dfrac{d\sum_k (x+kd)}{\tau}$

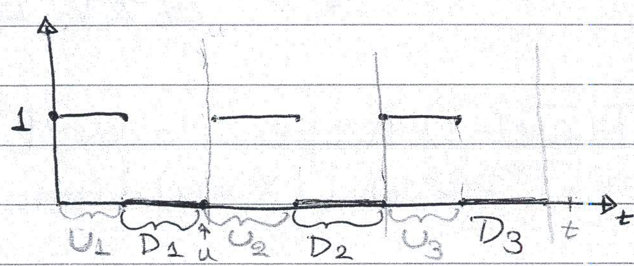
$\left(\exists d : \sum_k P(X=kd)=1\right)$

④ Εφαρμογή: Η εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδ.

Μια μηχανή εναλλάσσεται μεταξύ περιόδων λειτ. και αργία

$U_1, U_2, \dots$ οι διαδοχ. χρόνοι λειτ. $\quad (U_i, D_i)$ ανεξ., $i \geq 1$

$D_1, D_2, \dots$ οι —— // —— αργίας



$Z(t)$ = Η κατ. της μηχανής τη στιγμή t.

Να βρεθούν:

1/ Το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η μηχανή λειτουργεί

$= \lim\limits_{t\to\infty} E\left[\dfrac{\text{Χρόνος στο } [0,t] \text{ που η μηχ. λειτ.}}{t}\right]$

$= \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t 1\{Z(u)=1\}\,du\right]}{t}$

2/ Η πιθ. λειτουργίας της μηχ. τη στιγμή t

$= P(Z(t)=1)$

3/ Η οριακή πιθ. λειτουργίας της μηχανής.

$= \lim\limits_{t\to\infty} P(Z(t)=1)$

Λύση:

1/ Ορίζω $R(t)=\int_0^t 1\{Z(u)=1\}du$ διαδ. αμοιβής

και $N(t)=\#\underbrace{\text{αναν. κύκλων}}_{\text{περ. λειτ. + περ. αργίας}}$ ως τη στιγμή t

Έστω $G=G_{U+D}(t)$ η σ.κ. της U_i+D_i, G_U σ.κ. των U_i
G_D σ.κ. των D_i.

$X_i=U_i+D_i$: i-οστος ενδιαμ. χρ.

$R_i=U_i$.

Τα ζεύγη $(X_i,R_i)=(U_i+D_i,U_i)$, $i\geq 1$ είναι ανεξ. και ισον. οπότε το ΣΑΘΑ είναι εφαρμόσιμο

Άρα

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E\left[\int_0^t 1\{Z(u)=1\}du\right]}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{E[R(t)]}{t}=\frac{E[R_i]}{E[X_i]}=\frac{E[U]}{E[U]+E[D]}$$

2/ Ορίζω $H(t)=P(Z(t)=1)$. Δεσμεύω στον 1ο χρ. αναν.

$$H(t)=P(Z(t)=1)=\int_0^\infty P(Z(t)=1\mid X_1=u)\,dG_{U+D}(u)$$

$$P(Z(t)=1\mid X_1=u)=\begin{cases}P(t<U_1\mid U_1+D_1=u) & ,\ t<u\\ \underbrace{P(Z(t-u)=1)}_{H(t-u)} & ,\ t\geq u.\end{cases}$$

Άρα $H(t)=\underbrace{\int_t^\infty P(t<U_1\mid U_1+D_1=u)\,dG_{U+D}(u)}+\int_0^t H(t-u)\,dG_{U+D}(u)$

$$\parallel$$

$$\int_t^\infty P(t<U_1, U_1+D_1=u)\,du$$

$$\parallel$$

$$P(t<U_1, U_1+D_1\geq t)$$

$$\parallel$$

$$P(t<U_1)$$

$$\parallel$$

$$1-G_U(t)=D(t)$$

$$H(t)=D(t)+\int_0^t H(t-u)\,dG_{U+D}(u)$$ Αναν. Εξ16.

με λύση

$$H(t)=D(t)+\int_0^t D(t-u)\,dM_{G_{U+D}}(u)$$

$$\Rightarrow H(t)=(1-G_U(t))+\int_0^t(1-G_U(t-u))\,dM_{G_{U+D}}(u).$$

3/ Θα χρησιμ. το ΒΑΘ

Έστω ότι $G_{U+D}(t)$ συνεχής

$D(t) = 1 - G_U(t)$ μη-αρν., φθιν.

και

$$\int_0^\infty |D(t)|\,dt = \int_0^\infty D(t)\,dt = \int_0^\infty (1 - G_U(t))\,dt = E[U] < \infty$$

Άρα από ΒΑΘ

$$\lim_{t\to\infty} P(Z(t)=1) = \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\tau} = \frac{E[U]}{E[U]+E[D]}$$

Ειδικές Περιπτώσεις:

1/ $U_i \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$, $D_i = c \cdot U_i$, c γν. σταθ.

2/ $U_i \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$, $D_i \sim \mathcal{E}xp(\lambda/c)$, ανεξ. της U_i

βλέπουμε τι γίνεται

1/ $$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1\{Z(u)=1\}\,du\right]}{t} = \frac{E[U]}{E[U]+E[D]} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + c/\lambda} = \frac{1}{1+c}$$

$\lim_{t\to\infty} P(Z(t)=1) =$ είναι ίσα

$P(Z(t)=1) = ;$

$G_U(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t>0$

$$G_{U+D}(t) = P(U_i + D_i \le t) = P(U_i + cU_i \le t) = P\left(U_i \le \frac{t}{1+c}\right) = 1 - e^{-\frac{\lambda t}{1+c}}, \ t>0$$

εκθετική

α η ανανεωτ. διαδ. είναι Poisson

$$\Rightarrow M_{G_{U+D}}(t) = \frac{\lambda}{1+c} \cdot t$$

Άρα,

$$P(Z(t)=1) = e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} \cdot \frac{\lambda}{1+c}\,du = e^{-\lambda t} + \frac{\lambda}{1+c}\int_0^t e^{-\lambda u}\,du$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot \frac{1}{1+c} \cdot (1 - e^{-\lambda t})$$

2/ $$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1\{Z(u)=1\}\,du\right]}{t} = \frac{1}{1+c} = \lim_{t\to\infty} P(Z(t)=1)$$

Όμοια με το 1/

$P(Z(t)=1)=;$

$G_U(t)=1-e^{-\lambda t},\ t>0 \quad , G_D(t)=1-e^{-\frac{\lambda}{c}t},\ t>0$

$$\tilde{G}_{U+D}(s)=\tilde{G}_U(s)\tilde{G}_D(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}\cdot\frac{\lambda/c}{\lambda/c+s}=\frac{\lambda^2}{c(\lambda+s)(\frac{\lambda}{c}+s)}$$

$$\tilde{M}_{G_{U+D}}(s)=\frac{\tilde{G}_{U+D}(s)}{1-\tilde{G}_{U+D}(s)}=\frac{\frac{\lambda^2}{c(\lambda+s)(\frac{1}{c}+s)}}{1-\frac{\lambda^2}{c(\lambda+s)(\frac{\lambda}{c}+s)}}$$

$$=\frac{\lambda^2}{(\lambda+s)(\lambda+cs)-\lambda^2}=\frac{\lambda^2}{\lambda cs+\lambda s+cs^2}=\boxed{\frac{\lambda^2}{s(cs+\lambda+\lambda c)}}$$

$$=\boxed{\frac{A}{s}+\frac{B}{cs+\lambda+\lambda c}}$$

$$\Longrightarrow A=\frac{\lambda}{1+c},\quad B=\frac{\lambda^2}{-\frac{\lambda+\lambda c}{c}}=-\frac{\lambda c}{1+c}$$

Άρα,

$$\tilde{M}_{G_{U+D}}(s)=\frac{\lambda}{1+c}\cdot\frac{1}{s}-\frac{\lambda c}{1+c}\cdot\frac{1}{cs+\lambda+\lambda c}$$

$$=\frac{\lambda}{1+c}\cdot\frac{1}{s}-\frac{c}{(1+c)^2}\cdot\frac{\frac{\lambda(1+c)}{c}}{(s+\frac{\lambda(1+c)}{c})}$$

$$\Longrightarrow M_{G_{U+D}}(t)=\frac{\lambda}{1+c}\cdot\frac{1}{t}-\frac{c}{(1+c)^2}\left(1-e^{-\frac{\lambda(1+c)}{c}t}\right)$$

$$\Longrightarrow M'_{G_{U+D}}(t)=\frac{\lambda}{1+c}+\frac{\cancel{c}}{(1+c)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\lambda(\cancel{1+c})}{\cancel{c}}e^{-\frac{\lambda(1+c)}{c}t}$$

$$=\frac{\lambda}{1+c}\left(1+e^{-\frac{\lambda(1+c)}{c}t}\right)$$

Άρα,

$$P(Z(t)=1)=e^{-\lambda t}+\int_0^t e^{-\lambda(t-u)}\cdot\frac{\lambda}{1+c}\left(1-e^{-\frac{\lambda(1+c)}{c}u}\right)du$$

24/04/2013

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι

Μάθημα 17ο:

Ηλικία, Υπολειπόμενος και ο t-εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης

① Βασικά Αποτελέσματα

ΣΑΘΑ $\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_n]}{E[X_n]}$

Αναν. Εξ. $H(t) = D(t) + (H * G)(t)$

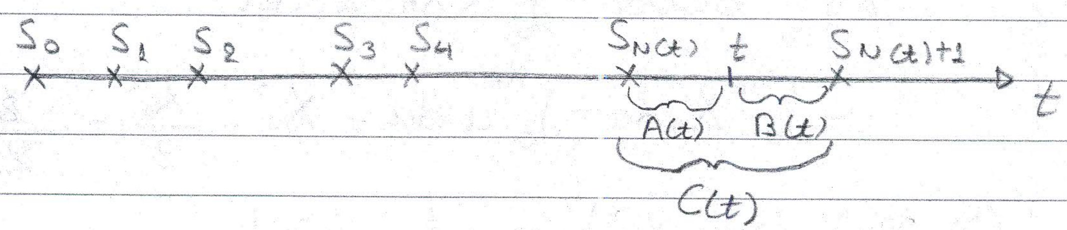
Λύση $H(t) = D(t) + (D * M_G)(t)$.

ΒΑΘ $\lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\tau}$ ← $E[X_n]$

② Πλαίσιο:

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. με ενδιαμ. χρ. $X_1, X_2, \dots$

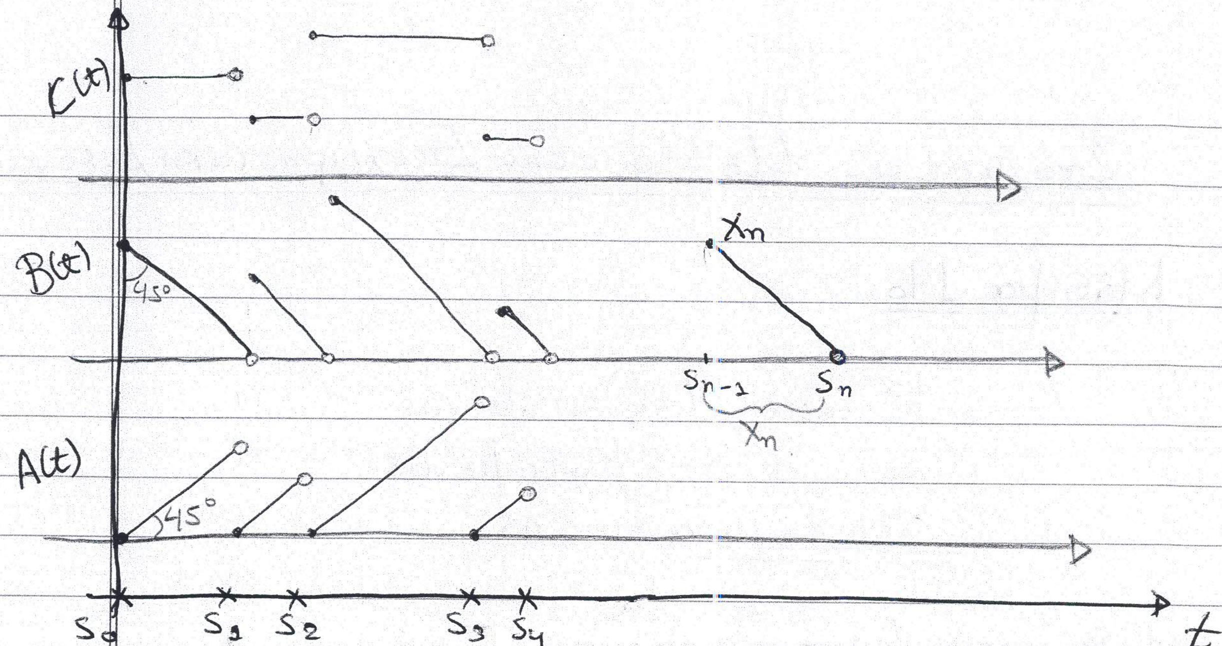
$E[X_i] = \tau < \infty$, $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$



$A(t) = t - S_{N(t)}$: χρόνος από το τελ. γεγ. πριν το t ως το t
ηλικία, παρελθών χρόνος αναν., αναδρομικός χρ. αναν.

$B(t) = S_{N(t)+1} - t$: χρόνος από το t ως το επόμ. γεγονός
υπολειπόμενος, προδρομικός χρόνος ανανέωσης

$C(t) = X_{N(t)+1}$: χρόνος μεταξύ του προηγ. & του επόμ. γεγον. τη στιγμή t
t-εξαρτωμ. ή ολικός χρόνος αναν. τη στιγμή t



③ Μελέτη του $B(t)$

1) Μακροπρόθεσμος Μέσος του $B(t)$ $= \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{E[\int_0^t B(u)\,du]}{t} = \dfrac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$

2) Μέση τιμή της $B(t) = E[B(t)]$

3) Οριακή μέση τιμή της $B(t) = \lim\limits_{t\to\infty} E[B(t)] = \dfrac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$

Υπολογισμοί:

1) Ορίζω $R(t) = \int_0^t B(u)\,du$

$$R_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} B(u)\,du = \int_0^{X_n} (X_n - u)\,du$$

$$= \int_0^{X_n} X_n\,du - \int_0^{X_n} u\,du = X_n^2 - \frac{X_n^2}{2} = \frac{X_n^2}{2}$$

$(X_n, R_n) = \left(X_n, \dfrac{X_n^2}{2}\right)$ ανεξ. , $n \geq 1$.

Άρα εφαρμόζω το ΣΑΘΑ

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t B(u)\,du]}{t} = \frac{E[R_n]}{E[X_n]} = \frac{E\left[\frac{X_n^2}{2}\right]}{E[X_n]} = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$$

2/ $E[B(t)] = E[E[B(t)|X_1]] = \int_0^\infty E[B(t)|X_1=u]\,dG(u)$

Όμως

$$E[B(t)|X_1=u] = \begin{cases} u-t, & t<u \\ E[B(t-u)], & t \geq u. \end{cases}$$

Αν $H(t)=E[B(t)]$ τότε

$$H(t) = \int_0^t H(t-u)\,dG(u) + \underbrace{\int_t^\infty (u-t)\,dG(u)}_{D(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\,dM_G(u)$$

3/ $G(t)$ υποτίθεται απεριοδική (συνήθως συνεχής)

Θα πρέπει να δείξω ότι

$D(t)$ γραφ. ως διαφ. 2 μονότονων, μη-αρνητ.

& $\int_0^\infty |D(t)|\,dt < \infty$.

$$D(t) = \int_t^\infty (u-t)\,dG(u) = \int_t^\infty u\,dG(u) - t\int_t^\infty dG(u)$$

$$= \int_0^\infty u\,dG(u) - \int_0^t u\,dG(u) - t(1-G(t))$$

$$= \tau - \cancel{[uG(u)]_0^t} + \int_0^t G(u)\,du - t + \cancel{tG(t)}$$

$$= \tau - \int_0^t (1-G(u))\,du$$

$$= \int_0^\infty (1-G(u))\,du - \int_0^t (1-G(u))\,du = \int_t^\infty (1-G(u))\,du.$$

φθινουσα ως προς t.

Άρα $D(t)$ είναι φθιν., ≥ 0 και

$$\int_0^\infty |D(t)|\,dt = \int_0^\infty D(t)\,dt = \int_0^\infty \int_t^\infty (1-G(u))\,du\,dt$$

$$= \int_0^\infty \int_t^\infty \int_u^\infty dG(x)\,du\,dt$$

$$\underline{\underline{0\le t\le u\le x}} \int_0^\infty \int_0^x \underbrace{\int_0^u dt}_{=u}\,du\,dG(x)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^x u\,du\, dG(x)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2\, dG(x) = \frac{1}{2} E[X_n^2] = \frac{1}{2}(\tau^2+\sigma^2) < \infty$$

Τελικά,

$$\lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\tau} = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}.$$

④ Το ανανεωτικό παράδοξο

Διαισθητικά περιμένουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t B(u)\,du]}{t} = \lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \frac{\tau}{2}$$

Η αλήθεια είναι ότι $= \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau} > \frac{\tau}{2}$

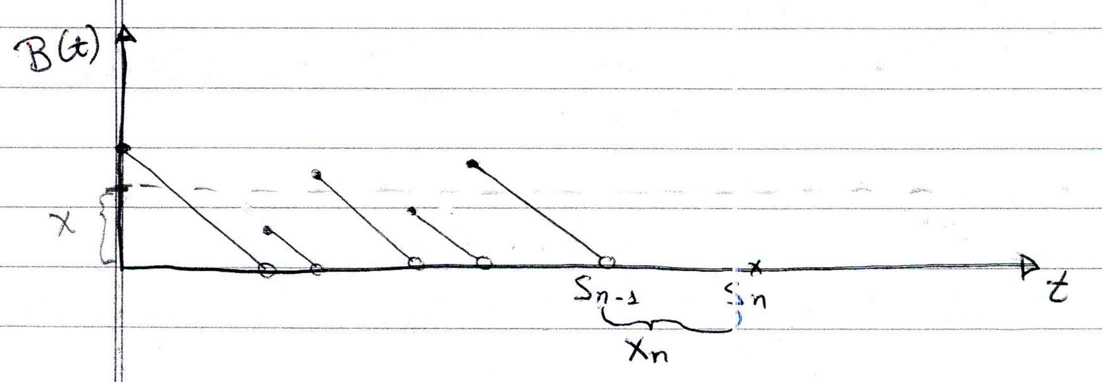
Μεταβλητότητα ενδιαμ. χρόνων $\Longrightarrow$ Αύξηση του μέσου υπολειπ. χρ. αναν.

⑤ Μελέτη της κατανομής του $B(t)$

$\{B(t)>x\}$: Ο υπολειπ. χρόνος ανανέωσης υπερβαίνει το x, τη στιγμή t.

1/ Μακροπρόθεσμο Μέσο Ποσοστό του χρόνου που ο υπολειπόμενος χρόνος υπερβαίνει το x.

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{B(u)>x\}}\,du]}{t} = \frac{\int_x^\infty (1-G(y))\,dy}{\tau}$$



2/ Πιθαν. τη στιγμή t $\quad = P[B(t) > x]$
ο υπολειπ. χρονος υπερβ. το x

3/ Οριακή πιθανότητα $\quad = \lim_{t\to\infty} P[B(t) > x]$
ο υπολειπ. χρόνος υπερβ. το x

Υπολογισμοί:

1/ $R(t) = \int_0^t 1_{\{B(u) > x\}} du$

$$R_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} 1_{\{B(u) > x\}} du = \begin{cases} X_n - x, & X_n \geq x \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$= \max(X_n - x, 0) = (X_n - x)^+$$

$(X_n, R_n) = (X_n, \max(X_n - x, 0))$ ανεξ. $n \geq 1$.
Το ΣΑΘΑ είναι εφαρμοσ.

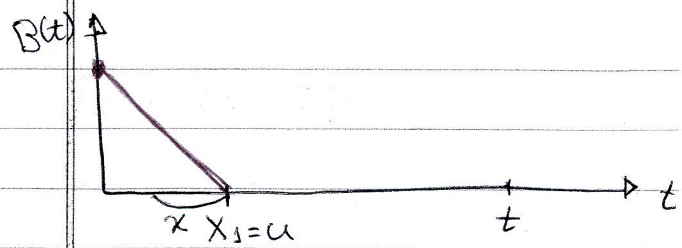
$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{B(u) > x\}} du\right]}{t} = \frac{E[R_n]}{E[X_n]}$$

$E[X_n] = \tau$

$$E[R_n] = E[\max(X_n - x, 0)]$$
$$= \int_0^\infty \left(1 - P(\max(X_n - x, 0) \leq u)\right) du$$
$$= \int_0^\infty \left(1 - P(X_n - x \leq u)\right) du$$
$$= \int_0^\infty \left(1 - P(X_n \leq x + u)\right) du$$
$$= \int_0^\infty \left(1 - G(x+u)\right) du \overset{y = x+u}{=\!=} \int_x^\infty (1 - G(y))\, dy$$

2/
3/ $H(t) = P(B(t) > x) = \int_0^\infty P(B(t) > x \mid X_1 = u)\, dG(u)$

$$P(B(t) > x \mid X_1 = u) = \begin{cases} 0, & u - x \leq t < u \\ 1, & t < u - x \\ \underbrace{P(B(t-u) > x)}_{H(t-u)}, & t \geq u \end{cases}$$



$$H(t)=\int_0^t H(t-u)\,dG(u)+\int_{t+x}^{\infty} 1\,d\,G(u)$$
$$=\int_0^t H(t-u)\,dG(u)+\underbrace{1-G(t+x)}_{D(t)}$$

$D(t)$ φθιν, ≥ 0 και $\int_0^\infty |D(t)|\,dt=\int_0^\infty D(t)\,dt$

$$=\int_0^\infty (1-G(\overset{y}{t+x}))\,dt=\int_x^\infty (1-G(y))\,dy<\int_0^\infty (1-G(y))\,dy=\tau<\infty$$

Από τη λύση της ανάν. εξίσ. έχουμε:

$$P(B(t)>x)=D(t)+\int_0^t D(t-u)\,dM_G(u)$$
$$\Downarrow$$
$$P(B(t)>x)=1-G(t+x)+\int_0^t (1-G(t-u+x))\,dM_G(u)$$

Το ΒΑΘ είναι εφαρμοσ. και άρα

$$\lim_{t\to\infty} P(B(t)>x)=\frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\tau}=\frac{\int_x^\infty (1-G(y))\,dy}{\tau}$$

⑥ Κατανομή ισορροπίας της αναν. διαδικ.

$$F_{B(\infty)}(x)=\lim_{t\to\infty} P(B(t)\leq x)=1-\frac{\int_x^\infty (1-G(y))\,dy}{\tau}$$
$$=\frac{\int_0^x (1-G(y))\,dy}{\tau}$$ κατανομή ισορ. της αναν. διαδ.

$$E[B(\infty)]=\frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$$

και σ.π.π. $f_{B(\infty)}(x)=\frac{1-G(x)}{\tau}$, $x>0$.

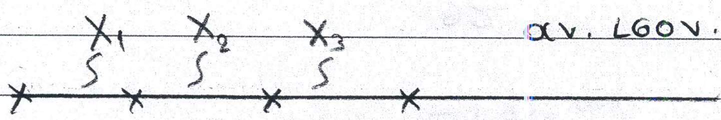
(Οικονόμου) 13/04/2013

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι

Μάθημα 18ο

Ανανεωτική Θεωρία

Υπενθυμίσεις:



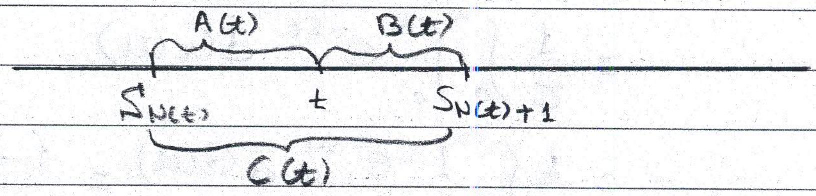
αν. ισον. $\sim G(x)$

Βασικοί υπολογισμοί:

S_n, $N(t)$, $M(t) = E[N(t)]$

Βασικά αποτελέσματα:

ΣΑΘΑ, Αναν. Εξίσ., ΒΑΘ



$$F_{B(\infty)}(x) = \lim_{t \to \infty} P(B(t) \le x) = \frac{\int_0^x (1 - G(u))\,du}{\tau}$$

$$E[B(\infty)] = \lim_{t \to \infty} E[B(\infty)] = \frac{\tau^2 + \sigma^2}{2\tau}$$

$(\tau = E[X_i]$, $\sigma^2 = Var[X_i])$

X_i: ενδιαμ. χρόνος μεταξύ δύο γεγον.

$B(\infty)$: Χρόνος μεταξύ τυχαίας χρονικής στιγμής και επόμενου γεγονότος.

① Κατανομή ισορ. της αναν. διαδ.

$B(\infty)$

σ.κ. $G_e(x) = F_{B(\infty)}(x) = \dfrac{\int_0^x (1-G(u))\,du}{\tau}, \quad x > 0$

σ.π.π. $g_e(x) = f_{B(\infty)}(x) = \dfrac{1-G(x)}{\tau}, \quad x > 0$

LS $\tilde{G}_e(s) = \tilde{F}_{B(\infty)}(s) = \dfrac{1-\tilde{G}(s)}{\tau s}$

Αποδ:

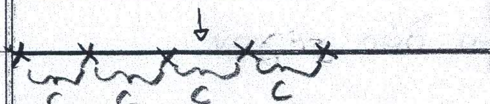
$$\tilde{G}_e(s) = \tilde{F}_{B(\infty)}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dF_{B(\infty)}(t)$$
$$= \int_0^\infty e^{-st} \frac{1-G(t)}{\tau}\, dt$$
$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^{-st} \int_t^\infty dG(u)\, dt$$
$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \int_0^u e^{-st}\, dG(u)$$
$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \frac{1-e^{-su}}{s}\, dG(u) = \frac{1-\tilde{G}(s)}{\tau s}$$

② Σχέση G και G_e

1) $X = c$

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases} \Rightarrow X_e \sim Unif([0,c])$$

$$G_e(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{c}, & 0 \leq x \leq c \\ 1, & x > c \end{cases}$$



αναλυτικά έχουμε:

Αποδ:

$$\tilde{G}(s) = E[e^{-sX}] = e^{-sc}$$
$$\Rightarrow \tilde{G}_e(s) = \frac{1-\tilde{G}(s)}{\tau s} = \frac{1-e^{-sc}}{c\cdot s} = \int_0^c e^{-st}\frac{1}{c}\, dt$$

2/ $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$

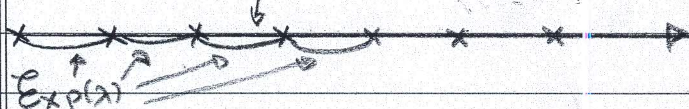
$$G(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \Longrightarrow \underline{X_e \sim \mathcal{E}xp(\lambda)}$$

Αποδ:

$$\tilde{G}(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$$

$$\Longrightarrow \tilde{G}_e(s) = \frac{1-\tilde{G}(s)}{\tau s} = \frac{1-\frac{\lambda}{\lambda+s}}{\frac{1}{\lambda}\cdot s} = \frac{\frac{s}{\lambda+s}}{\frac{s}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda+s}$$

3/ $X \sim Gamma(2,\lambda)$ $\Longrightarrow X_e \sim$ μίξη με πιθ. $1/2$ $Gamma(2,\lambda)$ $\mathcal{E}xp(\lambda)$



$$g_e(x) = \frac{1}{2}\lambda \cdot e^{-\lambda x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^2}{1!}x e^{-\lambda x}, \quad x>0$$

Αποδ:

$$\tilde{G}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{G}_e(s) = \frac{1-\tilde{G}(s)}{\tau s} = \frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2}{\frac{2}{\lambda}\cdot s} = \frac{\frac{(\lambda+s)^2-\lambda^2}{(\lambda+s)^2}}{\frac{2s}{\lambda}} = \frac{\frac{(2\lambda+s)s}{(\lambda+s)^2}}{\frac{2s}{\lambda}}$$

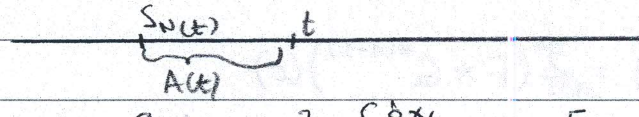
$$= \frac{2\lambda^2+\lambda s}{2(\lambda+s)^2} = \frac{A}{\lambda+s} + \frac{B}{(\lambda+s)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \dots$$

3 Οριακή κατανομή της ηλικίας

$A(t) = t - S_{N(t)}$ ηλικία



<u>Κλειδί</u>: $\{A(t) > x\} = \{$όχι σεσ. στο $[t-x, t]\}$
$= \{B(t-x) > x\}$

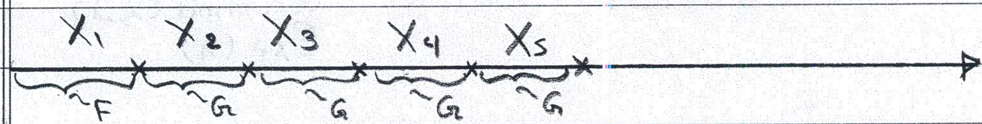
κλειδί

$$F_{A(\infty)}(x) = \lim_{t\to\infty} P(A(t)\le x) = 1 - \lim_{t\to\infty} P(A(t)>1) = 1 - \lim_{t\to\infty} P(B(t-x)>x)$$

$$= \lim_{t\to\infty} P(B(t-x)\le x) = \lim_{t\to\infty} P(B(t)\le x) = \frac{\int_0^x (1-G(u))\,du}{\tau} = \hat{G}_e(x)$$

$$E[A(\infty)] = \lim_{t\to\infty} E[A(t)] = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$$

④ Η γενική ανανεωτική διαδ.



$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ανεξ.

$X_1 \sim F$

$X_2, \ldots, X_n \sim G$

$N(t) = \#$ γεγον. στο $(0,t]$ ← γεν. αναν. διαδ.

$S_n =$ χρόνος του $n^{ου}$ γεγον. | εδώ εντοπίζουμε το πρόβλημα

$N(t) = \#$ γεγον. στο $(0,t]$

$M(t) = E[N(t)]$

$$F_{S_n}(t) = P(S_n\le t) = P(X_1+X_2+\ldots+X_n\le t) = (F * G^{*(n-1)})(t)$$

$$P_0(t) = P(N(t)=0) = P(S_1>t) = 1-P(S_1\le t) = 1-F(t)$$

$$P_n(t) = P(N(t)=n) = P(S_n\le t< S_{n+1}) = P(S_n\le t) - P(S_{n+1}\le t)$$

$$= (F*G^{*(n-1)})(t) - (F*G^{*n})(t), \quad n\ge 1$$

$$M(t) = E[N(t)] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n\le t\}}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n\le t) = \sum_{n=1}^{\infty} (F*G^{*(n-1)})(t)$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

▶ Συχνά σε εφαρμογές παίρνουμε $F=G_e$

Τότε

$$M(t)=\frac{t}{\tau}$$ $\longleftarrow$ Μέση τιμή της $G(t)$

Απόδειξη:

$$F=G_e \Longrightarrow \tilde{F}(s)=\tilde{G}_e(s)=\frac{1-\tilde{G}(s)}{\tau s}$$

$$\Longrightarrow \tilde{M}(s)=\frac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{G}(s)}=\frac{1}{\tau s}$$

$$\Longrightarrow M(t)=\frac{1}{\tau}\cdot t$$

⑤ Άσκηση (Φυλ. 7/2)

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ.

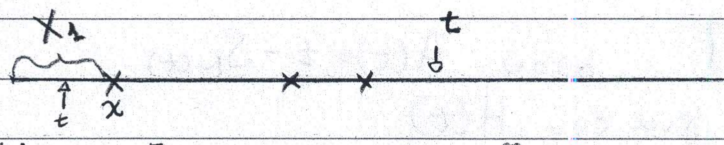
$G(t)$ καταν. ενδιάμ. χρόνων

$H(t)=E[N(t)(N(t)-1)]$

1/ Να γραφεί μια αναν. εξίσ. για την $H(t)$

2/ Να βρεθεί η $H(t)$.

Λύση:



$$H(t)=E[N(t)(N(t)-1)]=\int_0^\infty E[N(t)(N(t)-1)\mid X_1=x]\,dG(x)$$

Όμως

$$E[N(t)(N(t)-1)\mid X_1=x]=\begin{cases}0, & 0\le t<x\\ \underbrace{E[(1+N(t-x))N(t-x)]}_{=E[N(t-x)(N(t-x)-1)]+2E[N(t-x)]\,=\,H(t-x)+2M(t-x)}, & t\ge x\end{cases}$$

$$(N(t)\mid X_1=x)\overset{d}{=}1+N(t-x)$$

$\uparrow$ ισχύει για $t\geq x$

Άρα,

$$H(t)=\int_0^t H(t-x)\,dG(x)+\underbrace{2\int_0^t M(t-x)\,dG(x)}_{D(t)}$$

$$D(t)=2(M*G)(t)=2\sum_{n=1}^{\infty} G^{(*n+1)}(t)=2(M(t)-G(t))$$

Η ανανν. εξίσωση για την $H(t)$:

$$H(t)=\underbrace{2(M(t)-G(t))}_{D(t)}+\int_0^t H(t-x)\,dG(x).$$

Η λύση είναι

$$H(t)=D(t)+\int_0^t D(t-x)\,dM(x)=D(t)+(D*M)(t)$$
$$=2(M(t)-G(t))+2(M*M)(t)-2(M*G)(t)$$
$$=2(\cancel{M(t)-G(t)})+2(M*M)(t)-2\cancel{(M*G)(t)}$$
$$=2M^{*2}(t)$$

⑥ <u>Άσκηση Φυλ. 7/5</u>

Ανασ. διαδ. $\{N(t)\}$

καταν. ενδιαμ. χρ. $G(t)$

$E[X_i^k]=\mu_k'$, $k\geq 1$

i ενδιάμεσος χρόνος

$H(t)=E[A(t)^2]$, όπου $A(t)=t-S_{N(t)}$

1/ Αναν. εξίσ. για την $H(t)$

2/ $\lim_{t\to\infty} E[A(t)^2]=;$

<u>Λύση:</u>

$$H(t)=E[A(t)^2]=\int_0^\infty E[A(t)^2\,|\,X_1=x]\,dG(x)$$

όμως

$$E[A(t)^2\,|\,X_1=x]=\begin{cases} t^2, & t<x \\ E[A(t-x)^2] = H(t-x), & t\geq x \end{cases}$$

(<u>Κλειδί</u>: $(A(t)\,|\,X_1=x)\overset{d}{=}A(t-x)$ όταν $t\geq x$)

Άρα

$$H(t) = \underbrace{\underbrace{\int_t^\infty t^2\, dG(x)}_{t^2(1-G(t))}}_{D(t)} = \int_0^t H(t-x)\, dG(x)$$

Ικανοποιούνται οι υποθέσεις για την $D(t)$ του ΒΑΘ.

Άρα

$$\lim_{t\to\infty} E[A(t)^2] = \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\tau} = \frac{\mu_3'}{3\mu_1'}$$

$$\int_0^\infty D(t)\,dt = \int_0^\infty \int_0^\infty t^2\, dG(x)\,dt = \int_0^\infty \int_0^x t^2\, dt\, dG(x)$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^3}{3}\, dG(x) = \frac{1}{3}\mu_3', \quad \tau = \mu_1'$$

(Μεταπτυχιακός) 15/05/2013

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι

Μάθημα 19ο:

Φυλλάδιο 6

④ χρόνος ζωής $\sim \mathcal{E}xp(\lambda)$

- χαλάσει ή
- ηλικία T

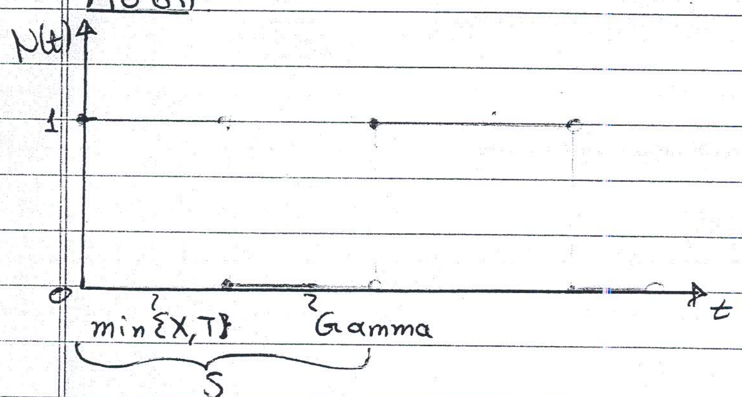
$\Big\}$ χρόνος αντικατάστασης $\sim Gamma(r,\mu)$

$$\frac{\mu^r}{(r-1)!}\, t^{r-1} \cdot e^{-\mu t}, \quad t \geq 0$$

$N(t) = \#$ μηχαν. ενός t

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = ;$$

Λύση:



$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} \overset{\Sigma A\Theta}{=\!=} \frac{1}{E[S]}$$

$$E[S] = E[\min\{X,T\} + Y]$$

$$= E[\min\{X,T\}] + \frac{r}{\mu} = \int_0^\infty \left(1 - F_{\min\{X,T\}}(t)\right) dt + \frac{r}{\mu} =$$

$$= \int_0^\infty Pr[\min\{X,T\} > t]\, dt + \frac{r}{\mu} =$$

$$= \int_0^\infty Pr[X > t, T > t]\, dt + \frac{r}{\mu} =$$

$$= \int_0^T Pr[X > t, T > t]\, dt + \int_T^\infty Pr[X > t, \underline{\underline{T > t}}]\, dt + \frac{r}{\mu}$$

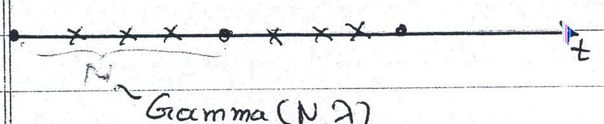
$$= \int_0^T Pr[X > t]\,dt + \frac{r}{\mu}$$

$$= \int_0^T e^{-\lambda t}\,dt + \frac{r}{\mu} = \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} + \frac{r}{\mu}$$

(5) Λεωφορ. αναχωρούν μόλις γεμίσουν
Χωρητικότητας N
Επιβ. $\sim$ Poisson (λ/min)
μακροπροθ. μέσος # $=;$
λεωφορ. που αναχ. ανά ώρα.

Λύση:
$N(t) =$ # λεωφορ. που αναχ. ανά ώρα.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{E[\text{διαρκ. κύκλου}]} = \frac{1}{\frac{N}{60\lambda}}.$$



Υπενθύμιση:
Εύρεση $M(t)$

- $\sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)$ (Άσκηση 1)
- $M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-x)\,dG(x)$ (Άσκηση 2)

ο πιο συνηθισμένος τρόπος
- $G(t) \to \tilde{G}(s) \to$ (Άσκηση 3)
$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} \to$
$M(t)$

Μετασχηματισμοί:

$$F(t) \longleftrightarrow \tilde{F}(s)$$

$$X \sim U \Rightarrow t \longleftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow 1 - e^{-\lambda t} \longleftrightarrow \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \longleftrightarrow \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^n$$

② $\underset{\{N(t)\}}{G(t)} \rightarrow$ μείγμα 2 εκθ.

$$g(t) = p\lambda \cdot e^{-\lambda t} + (1-p)\mu \cdot e^{-\mu t}, \quad t \geq 0$$

$$M(t) = E[N(t)] = ;$$

Λύση:

$$\tilde{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \, dG(t) \, dt = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) \, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} \left(p\lambda e^{-\lambda t} + (1-p)\mu e^{-\mu t}\right) dt$$

$$= p\lambda \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)t} dt + (1-p)\mu \int_0^{\infty} e^{-(s+\mu)t} dt$$

$$= \frac{p\lambda}{\lambda + s} + \frac{(1-p)\mu}{\mu + s} \quad (1)$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1 - \tilde{G}(s)} =$$

$$= \frac{\frac{p\lambda}{\lambda+s} + \frac{(1-p)\mu}{\mu+s}}{1 - \frac{p\lambda}{\lambda+s} - \frac{(1-p)\mu}{\mu+s}} = \dots = \frac{[p\lambda + (1-p)\mu]s + \lambda\mu}{s(s + \lambda(1-p) + \mu p)}$$

από ομοιόμορφη

$$= \frac{A}{s} + \underbrace{\frac{B}{s + [\lambda(1-p) + \mu p]}}_{\text{από εκθετική}} \quad (*)$$

$$\Rightarrow M(t) = A\cdot t + \frac{B}{[\lambda(1-p)+\mu p]}\cdot\left(1-e^{-(\lambda(1-p)+\mu p)t}\right)$$

$$\circledast = \frac{B}{\lambda(1-p)+\mu p}\cdot\underbrace{\frac{\lambda(1-p)+\mu p}{[\lambda(1-p)+\mu p]+s}}_{L-S \text{ της } Exp(\lambda(1-p)+\mu p)}$$

① $G(t) \sim U(0,1)$

$M(t) = E[N(t)] = ;$

Λύση:

$M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-x)\,dG(x) \Rightarrow$

$M(t) = t + \int_0^t M(\underbrace{t-x}_{u})\,dx \Rightarrow$

$M(t) = t + \int_0^t M(u)\,du \Rightarrow$

παραγωγίζω ως προς t

$M'(t) = 1 + M(t) \Rightarrow$

$M'(t) - M(t) = 1 \Leftrightarrow$

$e^{-t}M'(t) - e^{-t}M(t) = e^{-t} \Leftrightarrow$

$(e^{-t}M(t))' = e^{-t} \Rightarrow$

$e^{-t}M(t) = -e^{-t} + c$

$\left.\begin{array}{l} M(t) = -1 + c\cdot e^{t} \\ M(0) = 0 \Leftrightarrow \ldots c = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow M(t) = e^{t} - 1 \quad , 0 \le t \le 1$

Σημείωση: Η ομοιόμορφη μπορεί να λυθεί και με τους 3 τρόπους, απλώς είναι δύσκολο να βρεθεί άλλο παράδειγμα για αυτόν τον τρόπο!

③ $G(t) \sim Gamma(r,\lambda)$

$\{N(t)\}$

$\frac{\lambda^r}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-\lambda t} \quad , t \ge 0$

Ν.δ.ο. $M(t)=E[N(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{1-\sum_{j=0}^{nr-1}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\right\}, \quad t\geq 0.$

<u>Λύση:</u>

$$M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}G^{*n}(t)$$

$G\sim Gamma(r,\lambda)\Rightarrow$

$G^{*n}\sim Gamma(nr,\lambda)\Rightarrow$

$$G^{*n}(t)=Pr[S_{nr}\leq t]$$
$$=Pr[N(t)\geq nr]$$
$$=\sum_{j=nr}^{\infty}Pr[N(t)=j]$$
$$=\sum_{j=nr}^{\infty}e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

Οπότε

$$M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=nr}^{\infty}e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^j}{j!}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{1-\sum_{j=0}^{nr-1}e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^j}{j!}\right\}$$

<u>Φυλλάδιο 7</u>

① $\{N(t)\}$

$G(t)$

$\to \tau, \sigma^2$

$M(t)=E[N(t)], \quad t\geq 0$

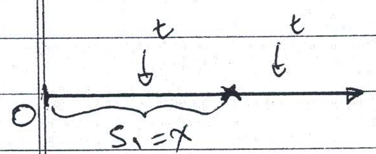
$H(t)=M(t)-\frac{t}{\tau}, \quad t\geq 0$

α) αναν. εξισ. + λύση για $H(t)$

β) $\lim_{n\to\alpha}\left(M(t)-\frac{t}{\tau}\right)=;$ (συναρτήσει τ, σ^2)

Λύση:

α) $H(t)=\int_0^\infty E\left[\underbrace{N(t)-\frac{t}{\tau}\,\middle|\, S_1=x}\right] dG(x)$ (1)



$$\hookrightarrow \begin{cases} 1+E[N(t-x)]-\frac{t}{\tau}, & x\le t\\ 0-\frac{t}{\tau}, & x>t\end{cases} =$$

$$=\begin{cases} 1+U(t-x)-\frac{t}{\tau}, & x\le t\\ -\frac{t}{\tau}, & x>t\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1+H(t-x)+\frac{t-x}{\tau}-\frac{t}{\tau}, & x\le t\\ -\frac{t}{\tau}, & x>t\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1+H(t-x)-\frac{x}{\tau}, & x\le t\\ -\frac{t}{\tau}, & x>t\end{cases}$$

$$(1) \Longrightarrow H(t)=\int_0^t\left(1+H(t-x)-\frac{x}{\tau}\right)dG(x)+\int_t^\infty -\frac{t}{\tau}\,dG(x)$$

$$H(t)=\underbrace{\int_0^t dG(x)-\frac{1}{\tau}\int_0^t x\,dG(x)-\frac{t}{\tau}\int_t^\infty dG(x)}+\int_0^t H(t-x)dG(x)$$

$H(t)=D(t)+\int_0^t H(t-x)dG(x)$ ⟵ αν. εξ16.

$H(t)=D(t)=\int_0^t D(t-x)\,dm(x)$ ⟵ λύση αναν. εξ16.

β) $\lim_{t\to\infty} H(t) \underline{\underline{ΒΑΘ}} \frac{\int_0^\infty D(t)dt}{\tau}$

προϋποθέσεις

* $\int_0^\infty D(t)\,dt$
* ↘ η διαφ. ↘
* $\int_0^\infty |D(t)|\,dt<\infty$

$$D(t)=\int_0^t dG(x) - \frac{1}{\tau}\int_0^t x\,dG(x) - \frac{t}{\tau}\int_t^\infty dG(x)$$

$$=\int_0^t dG(x) - \frac{1}{\tau}\left[xG(x)\right]_0^t + \frac{1}{\tau}\int_0^t dG(x) - \frac{t}{\tau}(1-G(t))$$

$$=\int_0^t dG(x) - \cancel{\frac{tG(t)}{\tau}} + \frac{1}{\tau}\int_0^t dG(x) - \frac{t}{\tau} + \cancel{\frac{t}{\tau}G(t)}$$

$$=\int_0^t dG(x) + \frac{1}{\tau}\int_0^t dG(x) - \frac{t}{\tau} \qquad \int_0^t 1\,dt$$

$$\Rightarrow D(t)=\int_0^t dG(x) - \frac{1}{\tau}\int_0^t (1-G(t))\,dt$$

$$= G(t) - \frac{1}{\tau}\int_0^t (1-G(t))\,dt$$

$$= -(1-G(t)) + 1 - \frac{1}{\tau}\int_0^t (1-G(t))\,dt$$

$$= -(1-G(t)) + \frac{1}{\tau}\int_0^\infty (1-G(t))\,dt - \frac{1}{\tau}\int_0^t (1-G(t))\,dt$$

$$\Rightarrow D(t) = \underbrace{-(1-G(t))}_{D_1(t)} + \underbrace{\frac{1}{\tau}\int_t^\infty (1-G(t))\,dt}_{D_2(t)}.$$

- $\int_0^\infty |D_1(t)|\,dt = \int_0^\infty (1-G(t))\,dt = \tau < \infty$

- $\int_0^\infty |D_2(t)|\,dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty\int_t^\infty (1-G(x))\,dx\,dt$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty\int_t^\infty\int_x^\infty G(u)\,du\,dx\,dt \qquad , u>x,\ x>t$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty\int_0^u\int_0^x G(u)\,dt\,dx\,du$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty\int_0^u x\,G(u)\,dx\,du$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty G(u)\left(\int_0^u x\,dx\right)du = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty G(u)\,\frac{u^2}{2}\,du =$$

$$= \frac{1}{2\tau}\int_0^\infty u^2 G(u)\,du = \frac{1}{2\tau}(\tau^2+\sigma^2) < \infty.$$

Επομένως, $\int_0^\infty |D(t)|\,dt < \infty$

και $\int_0^\infty D(t)\,dt = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau} - \tau$

οπότε $\lim\limits_{t\to\infty} H(t) = \frac{\frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau} - \tau}{\tau} = \frac{\tau^2+\sigma^2-2\tau^2}{2\tau^2} = \frac{\sigma^2-\tau^2}{2\tau^2}$