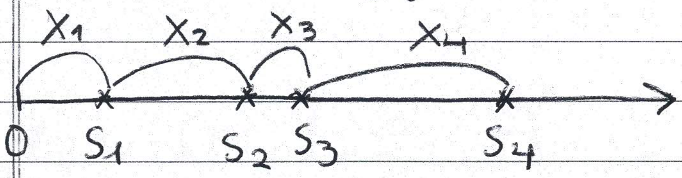
4/3/2013

Διαδικασία Poisson

① Κίνητρα - Στόχος

Μοντελοποίηση γεγονότων στο χρόνο



$0 \le S_1 \le S_2 \le \dots$ Ακολουθία χρόνων γεγονότων

$N(t) = \#$ γεγονότων στο $(0,t]$ ← Απαριθμήτρια στοχ. διαδ

$= \sup\{n \geq 0 : S_n \le t\}$

② Ορισμός I σ.δ Poisson

Έστω $\underset{\substack{\shortparallel \\ S_0}}{0} \le S_1 \le S_2 \le \dots$, $X_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 1$

Αν $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες με
$X_i \sim \exp(\lambda)$

τότε η σ.δ $\{N(t) : t \geq 0\}$, $N(t) = \#$ γεγονότων στο $(0,t]$

λέγεται σ.δ Poisson ρυθμού λ. ⇝ Το μέσο πλήθος γεγονότων στη μονάδα του χρόνου

③ Βασικοί υπολογισμοί

S_n = χρόνος n-οστού γεγονότος

$F_{S_n}(t) = P_r[S_n \le t]$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $X_i \sim \exp(\lambda)$ ανεξ.

$S_n \sim \text{Gamma}(n,\lambda)$

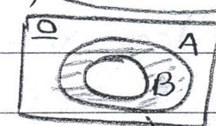
σ.π.π $\quad f_{S_n}(t)=\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\, t^{n-1} e^{-\lambda t}, \quad t>0$

Παραγοντική ολοκλήρωση

σ.κ $\quad F_{S_n}(t)=Pr[S_n\le t]=\displaystyle\int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\,u^{n-1}e^{-\lambda u}\,du$

$$=1-\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$P_n(t)=Pr[\underline{N(t)=n}]=Pr[\underline{S_n\le t<S_{n+1}}] \overset{*}{=} \quad \Rightarrow \overset{B}{S_{n+1}\le t} \Rightarrow \overset{A}{S_n\le t}$



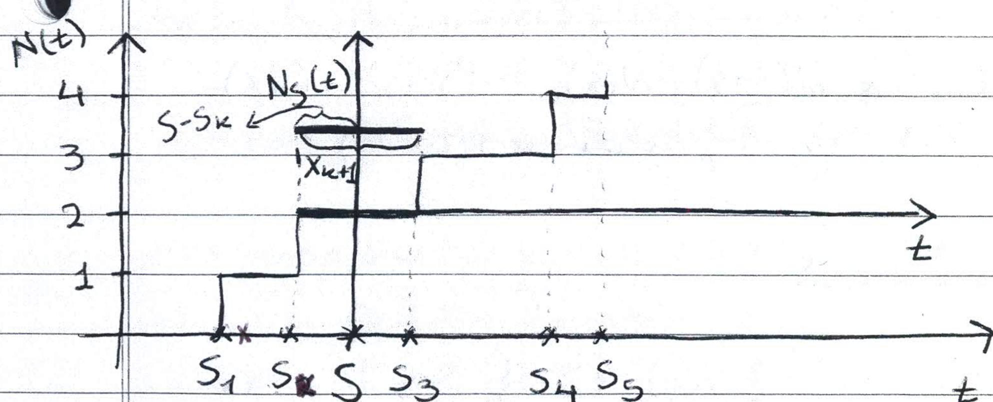
Δηλ. θέλουμε το $A \setminus B$

$\left(\{N(t)=n\}=\{S_n\le t<S_{n+1}\},\ \{S_n\le t\}=\{N(t)\ge n\}\right)$

$\overset{*}{=} Pr[S_n\le t]-Pr[S_{n+1}\le t]=e^{-\lambda t}\cdot\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n=0,1,\dots$

Για κάθε $t>0$ η τ.μ $N(t)$ ακολουθεί Poisson(λt)

4 Ιδιότητα Ανεξάρτητων και ομογενών προσαυξήσεων



Θεώρημα: Αν $\{N(t): t\ge 0\}$ σ.δ Poisson με ρυθμό λ και $s>0$ και ορίσω $\{N_s(t): t\ge 0\}$ με $N_s(t)=N(s+t)-N(s)$ τότε η $\{N_s(t): t\ge 0\}$ είναι σ.δ Poisson με ρυθμό λ και ανεξάρτητη από την $\{N(t): 0\le t\le s\}$.

Απόδειξη:

Έστω ότι $N(s)=k$, $S_1=s_1, S_2=s_2, \dots, S_k=s_k < s$

$$Pr\left[\begin{matrix}1^o \text{ γεγονός της} \\ N_s(t) > x\end{matrix} \middle| S_1=s_1, S_2=s_2, \dots, S_k=s_k, N(s)=k\right] =$$

$$= Pr\left[X_{k+1}-(s-s_k) > x \middle| \cancel{X_1=s_1, X_2=s_2-s_1, X_3=s_3-s_2, \dots, X_k=s_k-s_{k-1}}, X_{k+1} > s-s_k\right]$$

Δεν χρειαζόμαστε αυτή την πληροφορία λόγω της ανεξαρτησίας.

$$= Pr[X_{k+1} > x+s-s_k \mid X_{k+1} > s-s_k] = Pr[X_{k+1} > x] = e^{-\lambda x}.$$

Άρα Χρόνος ως το 1^o γεγονός της $\{N_s(t)\}$ είναι $\exp(\lambda)$ και ανεξάρτητος από την $\{N(t): 0 \le t \le s\}$.
Οι χρόνοι μεταξύ $i+1$ και i γεγονότος για κάθε $i=1,2,\dots$ στην $\{N_s(t)\}$ είναι προφανώς ανεξ $\exp(\lambda)$ (κοιτώντας στην αρχική διαδικασία) και ανεξ. του $1^{ου}$ χρόνου.

Ιδιότητα Ανεξ. Προσαυξ.
- Αν $t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4$ τότε
- $\underbrace{N(t_4)-N(t_3)}_{\#\text{γεγ. στο } (t_3,t_4]}$, $\underbrace{N(t_2)-N(t_1)}_{\#\text{γεγ. στο } (t_1,t_2]}$ είναι ανεξάρτητες.

Ιδιότητα Ομογ. Προσαυξ.
- Η τ.μ $N(t+s)-N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$
- (Δηλ. δεν εξαρτάται από το s)

5 Ορισμός II σ.δ Poisson

Μια απαριθμήτρια σ.δ $\{N(t): t \ge 0\}$ θα λέγεται σ.δ Poisson με ρυθμό λ αν:

i) Έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις
ii) Για κάθε $t>0$ η τ.μ $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

⑥ Ισοδυναμία Ορισμού I και II

Ορσ I $\Rightarrow$ Ορσ II ✓

Ορσ II $\Rightarrow$ Ορσ I $S_0 = 0$

$S_n = \inf\{t \geq 0 : N(t) = n\}$, $n \geq 1$

$X_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 1$

- $P_r(X_1 > t) = P_r(S_1 > t) = P_r[N(t) = 0] = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$

$\Rightarrow X_1 \sim \exp(\lambda)$

- $P_r(X_n > t \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})$ = χρησιμοποιώ τις ανεξ. προσαυξήσεις για να "πετάξω" τη δέσμευση

$\cap x)$ $\underset{0 \text{ γεγ}}{[0, x_1]}$, $\underset{1 \text{ γεγ}}{(x_1, x_1+x_2]}$ κτλ

$= P_r($Στο διάστημα $(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}, x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+t]$ δεν συνέβησαν γεγονότα$)$

χρησιμοποιώ τις ομογενείς προσαυξήσεις $= P_r(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$

Άρα $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ, ισον $\sim \exp(\lambda) \Rightarrow$ Ορσ I

⑦ Ορισμός III σ.δ Poisson

→ Πολύ κοντά στη διαίσθησή μας για την σ.δ Poisson, όμως δε βολεύει για πράξεις και εφαρμογές.

Μια απαριθμήτρια σ.δ $\{N(t) : t \geq 0\}$ θα λέγεται σ.δ Poisson ρυθμού λ αν:

i) Έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις

ii) $P_r[N(h) = k] = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h) & , k = 0 \\ \lambda h + o(h) & , k = 1 \\ o(h) & , k \geq 2 \end{cases}$ $h \to 0^+$ όπου $f(h) = o(h)$

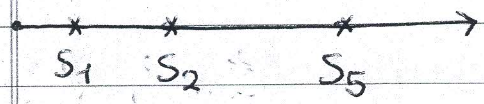
$\Updownarrow$

$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = 0$

6/3/2013

Διαδικασία Poisson

① Ορισμοί - Παραδείγματα



S_n : χρόνος n-οστού γεγονότος
$N(t) = \#$ γεγον. ως την t

Ορσ I

$X_1, X_2, \dots \sim exp(\lambda)$, ανεξ
$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$

Τότε η $\{N(t)\}$ λέγεται διαδ. Poisson ρυθμού λ

Ορσ II

$\{N(t)\}$ σ.δ απαριθμήτρια (τιμές $\in \{0, 1, \dots\}$, αύξουσα)
i) Ανεξ. και ομογ. προσαυξήσεις
ii) Η τ.μ $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$
$\Rightarrow$ Τότε η $\{N(t)\}$ λέγεται Poisson ρυθμού λ

Ορσ III

$\{N(t)\}$ σ.δ απαριθμήτρια
i) Ανεξ και ομογ. προσαυξήσεις
ii) $P(N(h) = k) = \begin{cases} 1 - \lambda h + o(h) & , k = 0 \\ \lambda h + o(h) & , k = 1 \\ o(h) & , k \geq 2 \end{cases}$ $\quad h \to 0^+$

$\Rightarrow$ Τότε η $\{N(t)\}$ λέγεται Poisson ρυθμού λ

Ορσ I $\Leftrightarrow$ Ορσ II ✓

Ορσ II $\Rightarrow$ Ορσ III

$P(N(h)=k) = e^{-\lambda h}\cdot\frac{(\lambda h)^k}{k!}, \; k=0,1,\ldots$ • Ανάπτυγμα Taylor

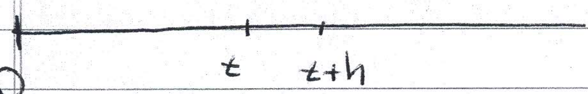
$P(N(h)=0) = e^{-\lambda h} = 1-\lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \ldots$ • Όλοι οι όροι που περιέχουν τετράγωνο απορροφώνται στο $o(h)$

$= 1-\lambda h + o(h), \; h \to 0^+$

$P(N(h)=1) = e^{-\lambda h}\cdot\lambda h = \lambda h + o(h), \; h\to 0^+$

$P(N(h)\geq 2) = o(h), \; h\to 0^+$

Ορσ III $\Rightarrow$ Ορσ II



$P_n(t) = P(N(t)=n), \; n=0,1,\ldots$

$P_n(t+h) = P(N(t+h)=n)$

$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)=k)P(N(t+h)=n \mid N(t)=k)$

$= \sum_{k=0}^{n} P_k(t)\,P(N(h)=n-k)$ ← Χρησιμοποιώ τις ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις.

$= P_n(t)(1-\lambda h+o(h)) + P_{n-1}(t)(\lambda h + o(h)) + o(h), \; h\to 0^+$

$\Rightarrow \boxed{P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda h) + P_{n-1}(t)\lambda h + o(h), \; h\to 0^+, \; n\geq 1}$

Όμοια, για $n=0 \Rightarrow \boxed{P_0(t+h) = P_0(t)(1-\lambda h) + o(h), \; h\to 0^+}$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{h \to 0^+} \frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h}}_{P_n'(t)} = -\lambda \cdot P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad , n \geq 1$$

$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$ και άρα έχουμε:

$$\begin{cases} * z^0 & P_0'(t) = -\lambda P_0(t) \\ * z^n & P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \ , n \geq 1 \end{cases}$$

Θέλω νδο: $P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, n = 0, 1, \ldots$

Και στη συνέχεια άθροισμα για όλα τα n.

Ορίζω: $P(t,z) = E[z^{N(t)}] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n$ η πιθανογεννήτρια της $\{N(t)\}$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(t) z^n = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(t) z^n$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t,z) = -\lambda P(t,z) + \lambda z P(t,z)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial}{\partial t} P(t,z)}{P(t,z)} = -\lambda (1-z)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\log P(t,z) \right) = -\lambda (1-z)$$

$$\Rightarrow \log P(t,z) - \log P(0,z) = -\lambda t (1-z)$$

$$\Rightarrow \frac{P(t,z)}{P(0,z)} = e^{-\lambda t (1-z)}$$

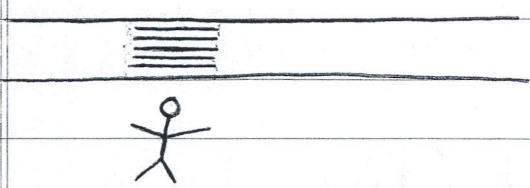
1 γιατί $N(0) = 0 \Rightarrow P(0,z) = E[z^{N(0)}] = E[z^0] = 1$

$$\Rightarrow P(t,z) = \underbrace{P(0,z)}_{=1} e^{-\lambda t (1-z)}$$

$$\Rightarrow P(t,z) = e^{-\lambda t (1-z)} = e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t z}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot z^n$$

② Παράδειγμα



- Διάβαση πεζών
- Αυτοκίνητα που περνούν τη διάβαση με ρυθμό λ αυτοκ./χρον.μον.
- Άνθρωπος θέλει να περάσει απέναντι και του παίρνει χρόνο t_0 χρον. μονάδες.
- Επιχειρεί να περάσει αν δει ότι το αυτοκίνητο περνά μετά από το t_0

Ερώτημα:

Ποιος ο μέσος χρόνος για να αρχίσει να διασχίζει τη διάβαση;

Λύση: (α' τρόπος επίπονος...)

X = χρόνος που θα απαιτηθεί για να διασχίσει τη διάβαση
T_i = χρόνος μεταξύ του i-οστού και $(i-1)$-οστού αυτοκινήτου, $i \geq 1$
T_1 = χρόνος $1^{ου}$ αυτοκινήτου
$T_1, T_2, \ldots \sim \exp(\lambda)$, ανεξ.
Έστω $N = \inf\{i : T_i > t_0\}$. Τότε:

$$X = \sum_{i=1}^{N-1} T_i \quad , \quad E[X] = ?$$

θεωρ. διπλής μέσης τιμής στον αριθμό των προσθετέων.

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{N-1} T_i\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N-1} T_i \,\Big|\, N\right]\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P[N=n]\, E\left[\sum_{i=1}^{N-1} T_i \,\Big|\, N=n\right] \quad (1)$$

Προτού βρει χρόνο $> t_0$ για να περάσει, όλοι οι προηγούμενοι, θα είναι $\leq t_0$.

$$P(N=n) = P(T_1 \leq t_0, T_2 \leq t_0, \ldots, T_{n-1} \leq t_0, T_n > t_0)$$

$$= (1-e^{-\lambda t_0})^{n-1} e^{-\lambda t_0}, \quad n \geq 1 \quad (2)$$

← $n-1$ αποτυχίες
← επιτυχία στην $n_{οστή}$

! Το N εξαρτάται από τα T_i

$$E\left[\sum_{i=1}^{N-1} T_i \,\Big|\, N=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1} T_i \,\Big|\, N=n\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} E[T_i \,|\, N=n] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} E[T_i \mid T_1 \le t_0, T_2 \le t_0, \dots, T_{n-1} \le t_0, T_n > t_0]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} E[T_i \mid T_i \le t_0]$$

$$= (n-1)\, E[T_i \mid T_i \le t_0] \quad (3)$$

$$E[T_i \mid T_i \le t_0] = \frac{\int_0^{t_0} t f_{T_i}(t)\, dt}{P(T_i \le t_0)} = \frac{\int_0^{t_0} \lambda t \cdot e^{-\lambda t}\, dt}{1-e^{-\lambda t_0}}$$

Παραγο-ντική $\int$ ή

Πυκνότητα της Gamma(n,λ)

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^n \cdot e^{-\lambda t}$$

$\int$ τροποποίηση γιατί θυμίζει την Gamma

$$= \frac{\frac{1}{\lambda}\int_0^{t_0} \frac{\lambda^2 t}{(2-1)!} \cdot e^{-\lambda t}\, dt}{1-e^{-\lambda t_0}} \quad (4)$$

$$\text{Gamma}(2,\lambda) = \frac{P(S_2 \le t_0)}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})} = \frac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 \cdot e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})}$$

Άρα: $$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} (1-e^{-\lambda t_0})^n e^{-\lambda t_0} (n-1) \cdot \frac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 \cdot e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})}$$

$$= \frac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})} \left(E[N]-1\right)$$

Έχει γεωμετρική κατανομή με πιθ. επιτυχίας $e^{-\lambda t_0}$

$$= \frac{1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{\cancel{\lambda(1-e^{-\lambda t_0})}} \cdot \cancel{(e^{\lambda t_0}-1)} \quad e^{\lambda t_0}$$

$$= \boxed{\frac{e^{\lambda t_0}-1}{\lambda} - t_0}$$

Συμφέρει να δεσμεύω σε κάτι που μου αναγεννά το πείραμα τύχης.

2ος τρόπος (Ανανεωτικός συλλογισμός)

$$E[X] = E[E[X \mid T_1]]$$

$$= \int_0^{\infty} E[X \mid T_1 = t]\, \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

και
$$E[X \mid T_1 = t] = \begin{cases} 0, & t \geq t_0 \\ t + E[X], & t \leq t_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E[X] = \int_0^{t_0} (t + E[X])\, \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

$$E[X] = \underbrace{\int_0^{t_0} \lambda t e^{-\lambda t}\, dt}_{\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0})} + E[X] \underbrace{\int_0^{t_0} \lambda e^{-\lambda t}\, dt}_{1 - e^{-\lambda t_0}}$$

$$\Rightarrow E[X] = e^{\lambda t_0} \cdot \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0})$$

$$= \boxed{\frac{e^{\lambda t_0} - 1}{\lambda} - t_0.}$$

11/3/2013

Δεσμευμένη κατανομή των χρόνων των γεγονότων μιας σ.δ Poisson, δεδομένου του αριθμού των γεγονότων σε διάστημα.

① Ερώτημα

$P(S_k \le x \mid N(t)=n) = ?$, $0 \le x \le t$, $0 \le k \le n$

$E[S_k \mid N(t)=n] = ?$, "

② Διατεταγμένες τμ

$X_1, X_2, \dots, X_n$ τμ

$X_{k:n}$ = κ-οστή μικρότερη / κ-οστή διατεταγμένη τμ των $X_1,\dots,X_n$

πχ) $X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$

$X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$

Αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες

- $$\begin{aligned} F_{X_{n:n}}(x) &= P(X_{n:n} \le x) \\ &= P(X_1 \le x, X_2 \le x, \dots, X_n \le x) \\ &= P(X_1 \le x) \dots P(X_n \le x) \\ &= F_{X_1}(x)\, F_{X_2}(x) \dots F_{X_n}(x) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} F_{X_{1:n}}(x) &= P(X_{1:n} \le x) = 1 - P(X_{1:n} > x) \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_2}(x)) \dots (1 - F_{X_n}(x)) \end{aligned}$$

③ Διατεταγμένες τμ. τυχαίου δείγματος

παίρνω παρατηρήσεις από μια κατανομή.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ συνεχείς, ανεξ, ισον $\sim F(x)$ σ.κ

$f(x)$ σ.π.π

$F_{k:n}(x) = P(X_{k:n} \leq x)$

$= P($τουλάχιστον k από τις $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι $\leq x)$

↳ (Θέλω σε n δοκιμές να έχω τουλ. k επιτυχίες

Δηλ σαν n δοκιμές Bernoulli όπου η $X_i \leq x$)

είναι η επιτυχία με πιθ. $F(x)$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1-F(x))^{n-j}$$

Αν θέλαμε θα μπορούσαμε και να παραγωγίσουμε, αλλά είναι αντιδιαισθητικό.

σ.π.π $\quad f_{X_{k:n}} = \lim_{\delta x \to 0^+} \dfrac{P(x \leq X_{k:n} \leq x+\delta x)}{\delta x}$

$$= \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P\begin{pmatrix} \text{ακριβώς } k-1 \text{ από τις } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ να είναι } \leq x \\ \text{" } 1 \text{ " " " να } \in (x, x+\delta x] \\ \text{" } n-k \text{ " " " να είναι } > x+\delta x \end{pmatrix}}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{\binom{n}{k-1}\binom{n-k+1}{1}\binom{n-k}{n-k} (F(x))^{k-1} P(x < X \leq x+\delta x)(1-F(x+\delta x))^{n-k}}{\delta x}$$

$\to \dfrac{n! \cancel{(n-k+1)!}}{(k-1)! \cancel{(n-k+1)!} (n-k)!}$

και $\delta x \to 0^+$

$\to f(x)(1-F(x))^{n-k}$

Άρα $f_{X_{k:n}}(x) = \dfrac{n!}{(k-1)!\, 1!\, (n-k)!} F(x)^{k-1} f(x) \cdot (1-F(x))^{n-k}$

Η από κοινού σ.ππ των $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$

$$\boxed{f_{(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n!\, f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n}$$

↳ σε κάθε άλλη περίπτωση ση δεν έχει νόημα, ισούται με 0.

πχ) $(X_1, X_2, X_5) = \begin{matrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{matrix}$

$X_{1:3} = 1, \quad X_{2:3} = 4, \quad X_{3:3} = 5$

(4) Διατεταγμένες τμ από ομοιόμορφη κατανομή

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ, ισον $\sim Uniform[0,t]$

σ.π.π $f(x) = \frac{1}{t}$, $0 \le x \le t$

σ.κ $F(x) = \frac{x}{t}$, $0 \le x \le t$

Να θυμόμαστε οπωσδήποτε αυτούς τους δύο τύπους!

$$\boxed{\begin{array}{l} \rightarrow \; f_{(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le t \\ \\ \rightarrow \; E[X_{k:n}] = \frac{kt}{n+1}, \quad 0 \le k \le n \end{array}}$$

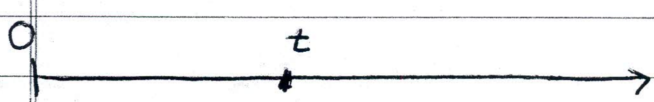
$E[X_{1:1}] = \frac{t}{2}$

$E[X_{1:2}] = \frac{t}{3}$, $E[X_{2:2}] = \frac{2t}{3}$

(5) Δεσμευμένη κατανομή του S_1 δοθέντος ότι $N(t)=1$

$\{N(t)\}$ σδ Poisson ρυθμού λ

S_1 = χρόνος $1^{ου}$ γεγονότος.



$P(S_1 \le x / N(t)=1) = ?$, $0 \le x \le t$

↳ είναι σαν να λέμε ότι ακολουθεί την ομοιόμορφη στο $[0,t]$

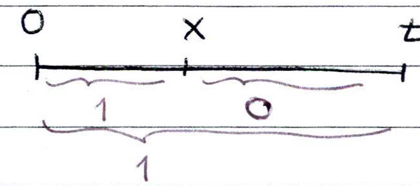
$$= \frac{P(S_1 \le x, N(t)=1)}{P(N(t)=1)}$$

Μεταφράζουμε το $S_1 \le x$ σε σχέση με το $N(x)$.

Δηλ $\{S_n \le t\} = \{N(t) \ge n\}$

$$= \frac{P(N(x) \ge 1, N(t)=1)}{P(N(t)=1)}$$

$$= \frac{P(N(x)=1, N(t)=1)}{P(N(t)=1)}$$



$$= \frac{P(N(x)=1, N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$$

ανεξ. προσαυξ.

$$= \frac{P(N(x)=1)\,P(N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$$

ομογ. προσαυξ.

$$= \frac{P(N(x)=1)\,P(N(t-x)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda x}} \cdot \frac{(\lambda x)^1}{1!} \cdot \cancel{e^{-\lambda(t-x)}} \cdot \frac{[\lambda(t-x)]^0}{0!}}{\cancel{e^{-\lambda t}} \cdot \frac{(\lambda t)^1}{1!}}$$

$$= \frac{x}{t}, \quad 0 \le x \le t$$

$$\Rightarrow (S_1 | N(t)=1) \overset{\text{κατά κατανομή ίδια}}{\overset{d}{=}} U_1 \sim U([0,t])$$

⑥ <u>Δεσμευμένη κατανομή του S_k δοθέντος $N(t)=n$</u>

$\{N(t)\}$ σ.δ Poisson ρυθμού λ

S_k: χρόνος k-οστού γεγονότος

$$(S_1, S_2, \dots, S_n | N(t)=n) \overset{d}{=} (U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n})$$

διατεταγμένων τ.μ από κοινού κατανομή ~~η~~ ανεξ, ισόν, Uniform$([0,t])$

Για ομοιόμορφες

$$* \quad f_{(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n \le t$$

$$* \quad E[X_{k:n}] = \frac{kt}{n+1}$$

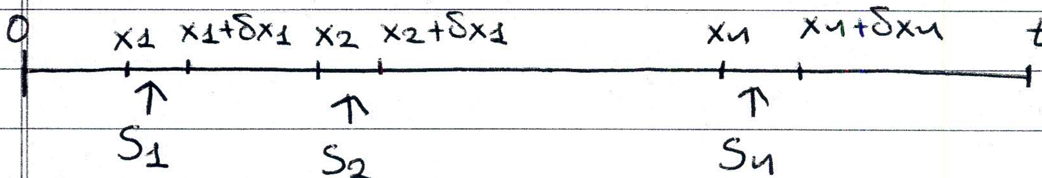
Απόδειξη:

Ανδο:

σ.π.π $f_{(S_1,S_2,\dots,S_n|N(t)=n)}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \frac{n!}{t^n}$, $0\le x_1\le x_2\le \dots \le x_n\le t$

Έχω: $f_{(S_1,S_2,\dots,S_n|N(t)=n)}(x_1,x_2,\dots,x_n) =$

$$= \lim_{\delta x_1,\delta x_2,\dots,\delta x_n\to 0^+} \frac{P(x_1<S_1\le x_1+\delta x_1,\dots\dots, x_n<S_n\le x_n+\delta x_n | N(t)=n)}{\delta x_1\,\delta x_2 \dots \delta x_n}$$



$$= \lim_{\delta x_1,\dots,\delta x_n\to 0^+} \frac{\cancel{e^{-\lambda x_1}}\cdot \cancel{e^{-\lambda\delta x_1}}\cdot \frac{(\lambda\delta x_1)^1}{1!}\cdot \cancel{e^{-\lambda(x_2-x_1-\delta x_1)}}\cdots\cdots \cancel{e^{-\lambda(t-x_n-\delta x_n)}}}{\delta x_1\,\delta x_2\dots\delta x_n\cdot \cancel{e^{-\lambda t}}\cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{t^n}, \quad 0\le x_1\le x_2\le\dots\le x_n\le t$$

Πρακτικά αν θέλω να υπολογίσω μια πιθανότητα

$P((S_1,S_2,\dots S_n)\in A | N(t)=n) =$ πετάω τη δέσμευση και τις αντικαθιστώ με διατεταγμένες ομοιόμορφες

$= P((U_{1:n},\dots,U_{n:n})\in A)$

και

$E[f(S_1,\dots,S_n)|N(t)=n] = E[f(U_{1:n},U_{2:n},\dots,U_{n:n})]$

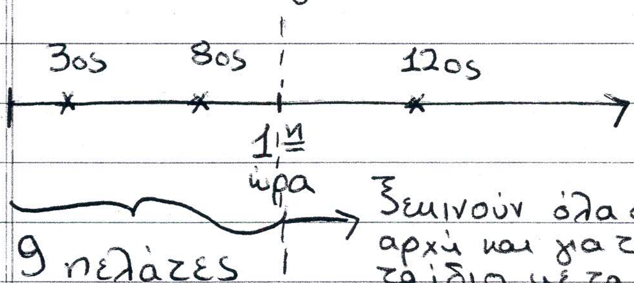
⑦ Παράδειγμα:

Πελάτες φθάνουν σε ένα κατάστημα σύμφωνα με σ.δ Poisson με ρυθμό 19 πελάτες /ώρα.

Ο $3^{ος}$ πελάτης θα περιμένει τον φίλο του που είναι ο κ-οστός πελάτης.

i) Ο μέσος χρόνος που θα περιμένει για τον φίλο του δεδομένου ότι στην $1^{η}$ ώρα λειτουργίας του καταστήματος ήρθαν 9 πελάτες.

Να λυθεί για κ=8 και κ=12.



ξεκινούν όλα από την αρχή και για τον 12ο είναι το ίδιο με το να είναι ο 3ος πελάτης της 2ης ώρας.

ο 8ος από 9 ομοιόμορφες   ο 3ος από 9 ομοιόμορφες

i) 1) $\kappa=8 \rightsquigarrow E[S_8-S_3/N(1)=9]=E[U_{8:9}-U_{3:9}]$

$$=\frac{8\cdot 1}{9+1}-\frac{3\cdot 1}{9+1}$$

$$=\frac{5}{10}\text{ ώρες},$$ Δηλ. μισή ώρα θα περιμένει για τον φίλο του

2) $\kappa=12 \rightsquigarrow E[S_{12}-S_3/N(1)=9]=E[S_{12}/N(1)=9]-E[U_{3:9}]$

$$=\frac{3}{19}+1-\frac{3\cdot 1}{9+1}$$

$$= \dots\dots$$

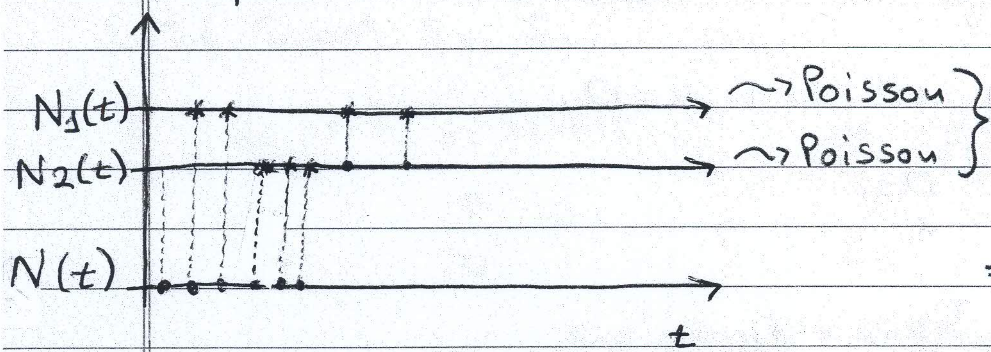
13/3/2013

Υπέρθεση και διάσπαση διαδικασιών Poisson

① Ορισμός

$\{N_i(t)\}$ ανεξ. σ.δ Poisson ρυθμού λ_i, $i=1,2,\dots$
($N_i(t)$ = # γεγον. τύπου i στο $(0,t]$).
Η σ.δ $\{N(t)\}$ με $N(t)=\sum_{i=1}^{\infty} N_i(t)$, όπου

$N(t)$ = συνολ πλήθος γεγον. στο $(0,t]$, λέγεται υπέρθεση των $\{N_i(t)\}$.



⇒ Όλοι οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι μεταξύ τους ανεξάρτητοι

⇒ Χρησιμοποιούμε ιδιοτ. minimum της exp.

② Θεώρημα

$\{N_i(t)\}$ ανεξ. σ.δ Poisson ρυθμού λ_i, $i=1,2,\dots$

$\Downarrow$

Η υπέρθεσή τους, $\{N(t)\}$ είναι επίσης σ.δ Poisson ρυθμού $\lambda=\sum_i \lambda_i$.

Απόδειξη: (Με τον 2ο ορισμό) Για 2 σ.δ Poisson

Οι $\{N_1(t)\}$, $\{N_2(t)\}$ είναι ανεξ. σ.δ Poisson με ρυθμούς λ_1, λ_2.

→ Ανεξ + Ομογ. προσαυξήσεις

→ $\forall t$ $N_1(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 t)$
$N_2(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_2 t)$

H $\{N(t)\}$ έχει ανεξ και ομογ. προσαυξήσεις.

πχ) $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

$$N(t_2)-N(t_1) \qquad , \qquad N(t_4)-N(t_3)$$

$$\begin{array}{c|c} \| & \| \\ (N_1(t_2)-N_1(t_1)) & (N_1(t_4)-N_1(t_3)) \\ + & + \\ (N_2(t_2)-N_2(t_1)) & (N_2(t_4)-N_2(t_3)) \end{array}$$

Άρα <u>ανεξ</u> $\Longrightarrow$ ανεξ. προσαυξήσεις.

$$N(t+s)-N(s) = (N_1(t+s)-N_1(s)) + (N_2(t+s)-N_2(s))$$

$$\stackrel{d}{=} N_1(t) + N_2(t)$$

$$= N(t)$$

$\Longrightarrow$ ομογ. προσαυξήσεις.

Τέλος, $E[z^{N_1(t)+N_2(t)}] = E[z^{N_1(t)}]\,E[z^{N_2(t)}]$

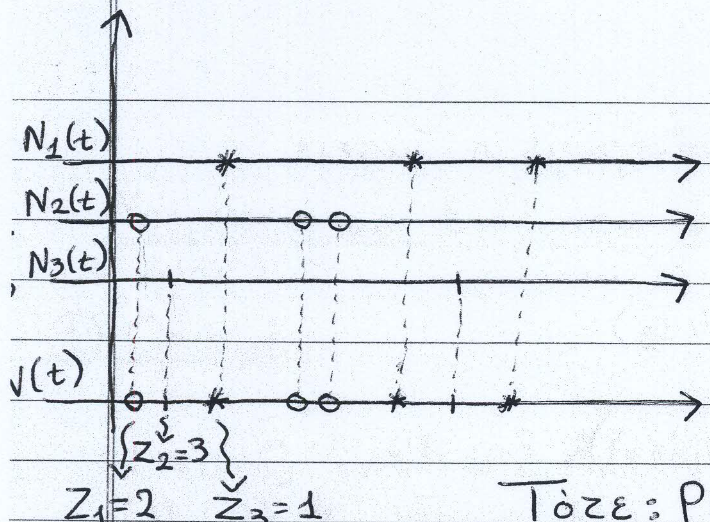
$$= e^{-\lambda_1 t(1-z)}\, e^{-\lambda_2 t(1-z)}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t(1-z)}$$

$\Longrightarrow N(t)$ είναι Poisson$((\lambda_1+\lambda_2)t)$

③ Τύποι γεγονότων - Θεώρημα

$\{N_i(t)\}$ ανεξ. σ.δ Poisson με ρυθμό λ_i, $i=1,2,\dots$
και $\{N(t)\}$ η υπέρθεση.
Z_j = τύπος του γεγονότος j της $\{N(t)\}$ (από ποια $\{N_i(t)\}$ προήλθε.)



Τότε: $P(Z_j=i)=\frac{\lambda_i}{\sum \lambda_i}$, $Z_1, Z_2, \dots$ ανεξ.

- <u>Ιδέα</u> απόδειξης:

$$P(Z_1=i)=P(\min(S_1,S_2,\dots)=S_i)=\frac{\lambda_i}{\sum\lambda_i}$$

χρόνος $1^{ου}$ γεγον. ... στην $\{N_1(t)\}\{N_2(t)\}$

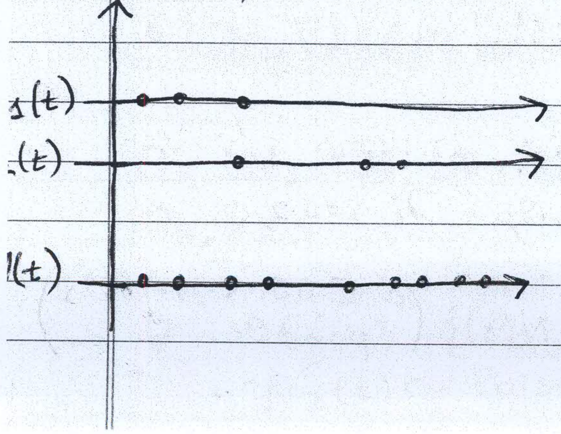
ιδιότητα δείκτη min της exp

Αμνήμονη ιδιότητα $\Longrightarrow$ ανεξ $\{Z_i\}$.

(4) Διάσπαση σ.δ Poisson

Έστω $\{N(t)\}$ για σ.δ Poisson ρυθμού λ και κάθε γεγονός καταγράφεται ως τύπου i, $i=1,2,\dots$ με πιθανότητα p_i, $(\sum p_i=1)$ ανεξ. από τα άλλα
$N_i(t) = \#$ γεγονότων τύπου i στο $(0,t]$.

Τότε, $\{N_i(t)\}$ ανεξ. σ.δ Poisson ρυθμού $\lambda_i=\lambda p_i$



__Ιδέα Απόδειξης:__

Έστω $X_1, X_2, \ldots \sim \exp(\lambda)$, ανεξ τμ οι ανεξάρτητοι χρόνοι γεγονότων στην $\{N(t)\}$.

Το 1ο γεγονός της $\{N_1(t)\}$ θα συμβεί σε χρόνο $S_1^{(1)}$.

$S_1^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} X_i$, όπου $\{N=n\} = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1} \neq 1, Z_n \neq 1\}$

$\Downarrow$ οι τμ είναι ανεξάρτητες

$$P(N=n) = P_1(1-P_1)^{n-1}$$

$$X_i \sim \exp(\lambda) \Longrightarrow \tilde{F}_X(S) = \int_0^\infty e^{-tS} \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+S}$$

$$P_N(z) = E[z^N]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p_1 (1-p_1)^{n-1} z^n$$

$$= p_1 z \sum_{n=1}^{\infty} [(1-p_1)z]^{n-1}$$

$$= \frac{p_1 z}{1-(1-p_1)z}$$

$$\tilde{F}_{S_1^{(1)}}(S) = P_N(\tilde{F}_X(S))$$

$$= \frac{p_1 \cdot \frac{\lambda}{\lambda+S}}{1-(1-p_1)\cdot\frac{\lambda}{\lambda+S}} = \frac{\frac{\lambda p_1}{\cancel{\lambda+S}}}{\frac{\cancel{\lambda}+S-\cancel{\lambda}+\lambda p_1}{\cancel{\lambda+S}}} = \frac{\lambda p_1}{S+\lambda p_1}$$

Το 1ο γεγονός της $\{N_1(t)\}$ συμβαίνει σε χρόνο $\exp(\lambda p_1)$ κ.ο.κ....

5 Παράδειγμα

Γεννήσεις σε μαιευτήριο σύμφωνα με σ.δ Poisson ρυθμού $\lambda = 10$ γεν/μέρα.

i) P(10 γεννήσεις την $1^{η}$ Απριλίου) = ;

ii) P(" " " | 8 γεν στις 31 Μαρτίου) = ?

iii) P(" " " | 40 γεν από 1-6 Απριλ) = ?

iv) P(το $1^{ο}$ αγόρι να είναι το $5^{ο}$ παιδί που γεννιέται από τη στιγμή που ξεκινάει η καταμέτρηση) = ?

v) E[Χρόνος για να γεννηθεί το $1^{ο}$ κορίτσι] = ?

Λύση: Ορίζουμε ότι: $t \to$ ημέρες

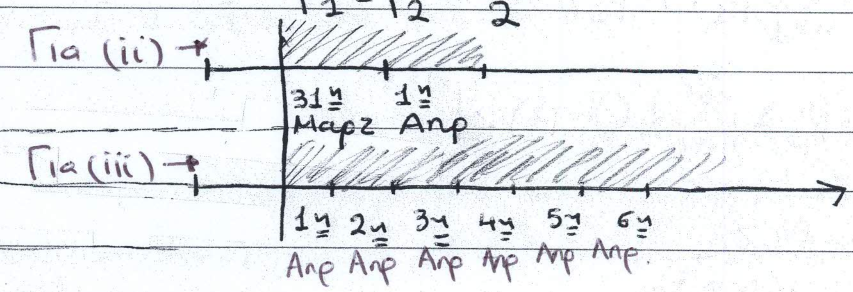
$N(t) = \#$ γεννησεων στο $(0,t] \to S_1, S_2, \dots$

$N_1(t) = \#$ γεν. κοριτσιών στο $(0,t] \to S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, \dots$

$N_2(t) = \#$ γεν. αγοριών στο $(0,t] \to S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, \dots$

$\lambda = 10$

$P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$



i) $P(N(1) = 10)$

Μοντελοποίηση

ii) $P(N(2) - N(1) = 10 \mid N(1) = 8)$

iii) $P(N(1) = 10 \mid N(6) = 40)$

iv) $P(Z_1 = K, Z_2 = K, Z_3 = K, Z_4 = K, Z_5 = A) = P(N_1(S_1^{(2)}) = 4)$

v) $E[S_1^{(1)}]$

$$i)\ P(\underset{t}{N(1)}=\underset{n}{10}) = e^{-\overset{\lambda}{10}\cdot \overset{t}{1}} \cdot \frac{(10\cdot 1)^{10=n}}{10!} = e^{-10}\cdot\frac{10^{10}}{10!}$$

$\lambda=10$

$$ii)\ P(N(2)-N(1)=10\,|\,\cancel{N(1)=8}) \quad \text{> ανεξ. προσαυξ}$$

$$= P(N(2)-N(1)=10) \overset{\text{ομογ. προσαυξ}}{=} P(N(1)=10) = e^{-10}\cdot\frac{10^{10}}{10!}$$

→ Δω είναι ανεξάρτητες, πρέπει να τα σπάσω ώστε να γίνουν ξένα.

$$iii)\ P(N(1)=10\,|\,N(6)=40) = \frac{P(N(1)=10,\ N(6)=40)}{P(N(6)=40)}$$

$$= \frac{P(N(1)=10,\ N(6)-N(1)=30)}{P(N(6)=40)}$$

Προσοχή, οι $N(6)-N(1)$, $N(5)$ όχι ίσες! Είναι ισόνομες όμως

ανεξ. προσαυξήσεις

$$\overset{\text{ανεξ. προσαυξήσεις}}{=} \frac{P(N(1)=10)\,P(N(6)-N(1)=30)}{P(N(6)=40)}$$

ομογ. προσαυξήσεις

$$\overset{\text{ομογ. προσαυξήσεις}}{=} \frac{P(N(1)=10)\,P(N(5)=30)}{P(N(6)=40)}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-10\cdot 1}}\cdot\frac{(10\cdot 1)^{10}}{10!}\ \cancel{e^{-10\cdot 5}}\cdot\frac{(10\cdot 5)^{30}}{30!}}{\cancel{e^{-10\cdot 6}}\cdot\frac{(10\cdot 6)^{40}}{40!}}$$

$$= \binom{40}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{30}$$

$$iv)\ P(Z_1=K, Z_2=K, Z_3=K, Z_4=K, Z_5=A) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$P(N_1(S_1^{(2)})=4) = \int_0^\infty P(N_1(t)=4)\cdot 5\cdot e^{-5t}\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-5t}\cdot\frac{(5t)^4}{4!}\cdot 5e^{-5t}\,dt$$

$$= \frac{5^5}{4!} \int_0^\infty t^4 e^{-10t} \, dt$$

και το μαγειρεύω για να γίνει κατανομή Gamma

$$= \frac{5^5}{10^5} \underbrace{\int_0^\infty \frac{10^5}{4!} t^{5-1} e^{-10t} \, dt}_{\text{πυκνότητα Gamma}(5,10)} = \frac{1}{32}$$

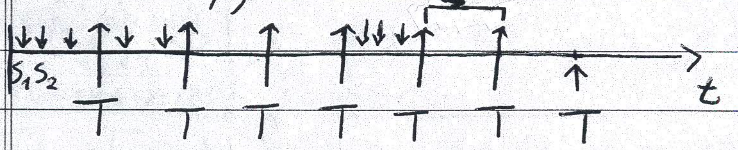
$\text{ή} \quad \text{λ}$

v) $E(S_1^{(1)}) = \frac{1}{5}$ ημέρες.

20/3/2013

Ασκήσεις στη Διαδ Poisson

① Συρμοί διέρχονται από ένα σταθμό του Μετρό κάθε 4'. Οι επιβάτες φθάνουν σύμφωνα με διαδ. Poisson με ρυθμό 30 επιβ/λεπτό. Ποιος ο μέσος συνολικός χρόνος αναμονής για όλους τους επιβάτες μεταξύ δύο διαδοχικών συρμών? $t=4'$



$t = 4$ λεπτά

$\lambda = 30$ επιβ/λεπτό

S: συνολ. χρόνος αναμονής

$\{N(t)\}$ Διαδ. Poisson για τους επιβάτες $S_1, S_2, \ldots$: χρόνοι γεγον. (αφίξεων επιβατών)

$$S = \sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)$$

$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)\right]$$ Θέλω να δεσμεύσω στην τ.μ $N(t)$

$$= E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i) \,\middle|\, N(t)\right]\right]$$ δεσμευμένη μέση τιμή

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P[N(t)=n]\, E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i) \,\middle|\, N(t) = n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} E\left[\sum_{i=1}^{n} (t - U_{i:n})\right]$$ όπου $U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots U_{n:n}$ είναι οι διατετ τμ από n ανεξ $Unif([0,t])$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (t - E[U_{i:n}])}_{= nt - \sum_{i=1}^{n} \frac{it}{n+1} = nt - \frac{t}{\cancel{n+1}} \cdot \frac{n\cancel{(n+1)}}{2} = \frac{nt}{2}}$$

λύση αν παρατηρήσουμε πιο καλά

$$(*) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot \frac{nt}{2}} \stackrel{*}{=} \frac{t}{2} E[N(t)] = \frac{\lambda t^2}{2}$$

λύση με πράξεις

$$= e^{-\lambda t} \cdot \frac{t}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!}$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot \frac{\lambda t^2}{2} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}}_{e^{\lambda t}}$$

$$= \frac{\lambda t^2}{2}$$

→ συμμετρική συναρτ.
ίδια τιμή για κάθε μετάθεση των $x_1, x_2, \ldots, x_n$
π.χ. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

Εναλλακτικός υπολογισμός του $E\left[\sum_{i=1}^{n} U_{i:n}\right]$

→ Δε θα μεταβληθεί η μέση τιμή αν τις διατάξω.

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} U_{i:n}\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} U_i\right]$$

Δηλ. η μέση τιμή του αθρ. διατεταγμ. είναι ίση με τη μέση τιμή του αθρ. μη διατεταγμένων.

$$= \frac{nt}{2}$$

Άρα θα περιμένουν κατά μέσο όρο $\frac{30 \cdot 4^2}{2}$ λεπτά.

Δηλ. 4 ώρες.

(2) $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ.

→ $Cov(N(t), N(s)) = ?$

<u>Έστω $s \leq t$</u>

$$Cov(N(t), N(s)) = E[N(t)N(s)] - E[N(t)]E[N(s)]$$

$$= E\left[\left(N(t) - N(s) + N(s)\right)N(s)\right] - \lambda t \cdot \lambda s$$

$$= E\left[(N(t) - N(s))N(s)\right] + E\left[N(s)^2\right] - \lambda t \cdot \lambda s$$

ανεξ. προσαυξ.

$$\stackrel{}{=} E[N(t) - N(s)]\, E[N(s)] + \underbrace{E[N(s)^2]}_{Var[N(s)] + E[N(s)]^2} - \lambda^2 ts$$

$$= \lambda(t-s)\lambda s + \lambda s + (\lambda s)^2 - \lambda^2 t s$$

$$= \cancel{\lambda^2 t s} - \cancel{\lambda^2 s^2} + \lambda s + \cancel{\lambda^2 s^2} - \cancel{\lambda^2 t s}$$

$$= \lambda s \longrightarrow \text{Για } s \leq t$$

<u>Για γενικά s, t</u> : $Cov(N(s), N(t)) = \lambda \cdot \min(s,t)$.

(3) Πελάτες φθάνουν σε μια τράπεζα σύμφωνα με ανεξ. διαδ. Poisson

ανεξ. διαδ. Poisson	Μέσος χρόνος εξυπ.
$\lambda_1 = 10$ πελ/ώρα $\longrightarrow$ Καταθέσεις	$3'$
$\lambda_2 = 12$ πελ/ώρα $\longrightarrow$ Αναλήψεις	$2'$
$\lambda_3 = 8$ πελ/ώρα $\longrightarrow$ Άλλες συναλ.	$10'$

Ποιος ο μέσος χρόνος εξυπ. ενός πελάτη?

Μπακάλικος τρόπος: (Σχεδόν Ντετερμινιστικός) $\dfrac{10 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 8 \cdot 10}{10 + 12 + 8}$

Λύση: $P(\text{ένας πελ. είναι τύπου } i) = P(\underbrace{Z_j}_{\text{τύπος του } j\text{-οστού πελάτη}} = i) = \dfrac{\lambda_i}{\Sigma \lambda_i}$

$P(\text{ένας πελ. έχει έρθει για καταθ}) = \dfrac{10}{10+12+8} = \dfrac{1}{3}$

$P(\text{ένας πελ. έχει έρθει για αναλ}) = \dfrac{12}{10+12+8} = \dfrac{2}{5}$

$P(\text{ένας πελ. έχει έρθει για άλλη συναλ}) = \dfrac{8}{10+12+8} = \dfrac{4}{15}$

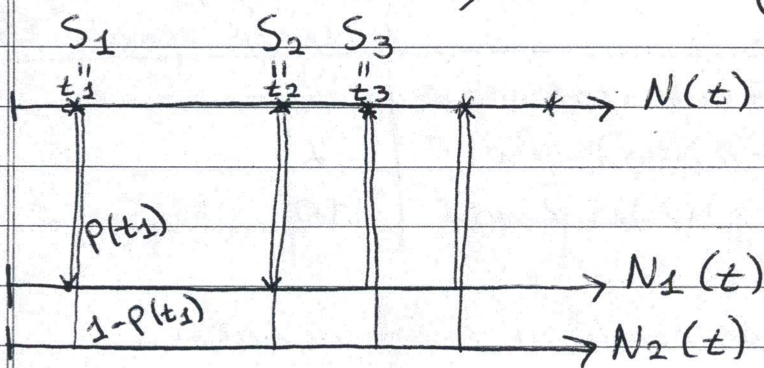
$$E[\text{χρόνος εξυπ}] = \sum_{i=1}^{3} P(\text{ο πελ. είναι τύπου } i) E[\text{Χρόνος εξυπ.} \mid \text{τύπου } i]$$

$$= \frac{10}{30} \cdot 3 + \frac{12}{30} \cdot 2 + \frac{8}{30} \cdot 10$$

④ Μη ομογενής διάσπαση της σ.δ Poisson

Θεώρημα

Έστω $\{N(t)\}$ σ.δ Poisson με ρυθμό λ. Κάθε γεγονός που συμβαίνει μια στιγμή t καταγράφεται με πιθανότητα $P(t)$.
Αν $N_1(t) = \#$ καταγεγρ. γεγον. ως τη στιγμή t, τότε η $N(t)$ έχει κατανομή Poisson$\left(\lambda\int_0^t p(u)\,du\right)$.



Απόδειξη

Υπενθύμιση: $X \sim$ Poisson(λ)

$$\Downarrow$$

$$P_X(z) = E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}}_{P(X=n)}\cdot z^n$$

$$= e^{-\lambda(1-z)}$$

Υπολογίζουμε την πιθανογεννήτρια της $N_1(t)$

$$N_1(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \underbrace{I(\text{το } i \text{ γεγονός της } \{N(t)\} \text{ καταγράφηκε})}_{I_i(S_i)}$$

όπου: $$I_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{με πιθ } p(t) \\ 0, & \text{με πιθ } 1-p(t) \end{cases}$$

$$P_{N_1(t)}(z) = E\left[z^{N_1(t)}\right]$$

$$= E\left[z^{\sum_{i=1}^{N(t)} I_i(S_i)}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, E\left[z^{\sum_{i=1}^{N(t)} I_i(S_i)} \,\middle|\, N(t)=n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot E\left[z^{\sum_{i=1}^{n} I_i(U_{i:n})}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot E\left[z^{\sum_{i=1}^{n} I_i(U_i)}\right]$$

όπως πριν επειδή είναι συμμετρική συνάρτηση η $\sum_{i=1}^{n} I_i(x_i)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot E\left[z^{I_1(U_1)}\right]^n$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t \cdot E\left[z^{I_1(U_1)}\right]} \quad (1)$$

$$E\left[z^{I_1(U_1)}\right] = \int_0^t E\left[z^{I_1(u)}\right] f_{U_1}(u)\, du \qquad f_{U_1}(u) = 1/t$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t \left(z^1 p(u) + z^0(1-p(u))\right) du \quad (2)$$

Οι (1), (2) δίνουν:

$$P_{N_1(t)}(z) = e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda\left(t - (1-z)\int_0^t p(u)\,du\right)}$$

$$= e^{-\lambda \int_0^t p(u)\,du\,(1-z)}$$

$$\Rightarrow N_1(t) \sim \text{Poisson}\left(\lambda \int_0^t p(u)\,du\right)$$

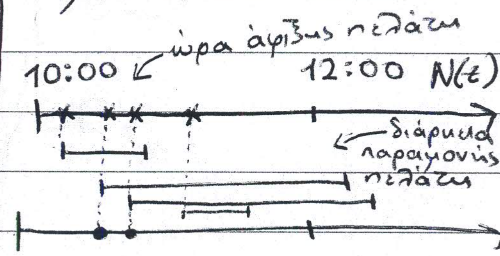
Εφαρμογή του (4)

(5) Ένα ιατρείο ανοίγει στις 10:00 το πρωί.
Τη στιγμή που ανοίγει περιμένουν 5 πελάτες.
Πελάτες συνεχίζουν να φθάνουν με ρυθμό 10πελ/ώρα.
Κάθε πελάτης παραμένει για χρόνο $\sim \exp$ με
μέση τιμή 20 λεπτά. ($\frac{1}{\lambda}$ = 20 λεπτά = $\frac{1}{3}$ ώρες $\Rightarrow \lambda = 3$)
Ποιο το μέσο πλήθος πελατών στις 12:00 το μεσημέρι?

Πλήθος πελατών στις 12:00 = Πλήθος αρχικών πελατών που παραμένουν στις 12:00 + Πλήθος πελατών που έφθασαν μετά τις 10:00 και παραμένουν στις 12:00.

$$\text{Bin}\left(5, P\left(\begin{matrix}\text{πελάτης παραμ.}\\ \text{για 2 ώρες}\end{matrix}\right)\right)$$

$$n = 5, \quad p = P(X>2) = e^{-3\cdot 2} = e^{-6}$$



καταγράφω τους πελάτες που παραμένουν στις 12:00

Για έναν πελάτη που φτάνει σε χρόνο t (σε ώρες) μετά τις 10:00, τότε:

$$P(\text{καταγραφής}) = P(\text{μένει ως τις 12:00})$$

$$= P\left(\begin{matrix}\text{χρόνος}\\ \text{παραμ}\end{matrix} > 2-t\right)$$

$$= e^{-3(2-t)}$$

Πλήθος πελατών που φτάνουν μετά τις 10:00 και παραμένουν στις 12:00 $\sim$ Poisson$\left(\lambda\int_0^t p(u)\,du\right)$ $= 3\int_0^2 e^{-3(2-u)}\,du$

Άρα: Μέσο πλήθος παρόντων πελ. στις 12:00 $= 5e^{-6} + 3\int_0^2 e^{-3(2-u)}\,du$.

27/3/2013

- Μη ομογενής σδ Poisson
- Σύνθετη σδ Poisson
- Ασκήσεις

① Ορισμός

Μια απαριθμήτρια σ.δ $\{N(t)\}$ με $(N(t) \in \{0,1,2,\dots\},\ N(t)\nearrow)$:

i) $$P(N(t+h)=j \mid N(t)=i) = \begin{cases} 1-\lambda(t)\cdot h+o(h), & j=i \\ \lambda(t)\cdot h+o(h), & j=i+1 \\ o(h), & j\geq i+2 \end{cases} \quad h\to 0^+,\ \frac{o(h)}{h}\to 0$$

ii) Ανεξ. προσαυξήσεις,

λέγεται μη-ομογ σ.δ Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$.

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du.$$

② Θεώρημα

πχ σε ένα νοσοκομείο που υπάρχει ώρα αιχμής

Αν $\{N(t)\}$ μη-ομογ διαδικασία Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$ τότε η τ.μ $N(t+s)-N(t) \sim \text{Poisson}(\Lambda(t+s)-\Lambda(t))$

$N(t+s)-N(t) =$ # γεγονότων στο $(t,t+s]$

$\Lambda(t+s)-\Lambda(t) = \int_t^{t+s} \lambda(u)\,du$

③ Μη-ομογ. Poisson – κατανομή του χρόνου του n-οστού γεγονότος

Απόδειξη: Όμοια με τη συνεπαγωγή Ορσ III ⟹ Ορσ II στη σδ Poisson

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \leq t)$$

$$= P(N(t) \geq n) \text{ όπου } N(t) \sim Poisson(\Lambda(t))$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} P(N(t)=k) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\Lambda(t)} \cdot \frac{\Lambda(t)^k}{k!}$$

Η σ.π.π είναι

$$f_{S_n}(t) = \frac{d}{dt} F_{S_n}(t)$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \left(-\lambda(t) e^{-\Lambda(t)} \cdot \frac{\Lambda(t)^k}{k!} + e^{-\Lambda(t)} \cdot \frac{k \Lambda(t)^{k-1} \cdot \lambda(t)}{k!} \right)$$

$$= e^{-\Lambda(t)} \cdot \lambda(t) \left(-\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Lambda(t)^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Lambda(t)^{k-1}}{(k-1)!} \right)$$

$$= \lambda(t) \cdot \frac{\Lambda(t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\Lambda(t)}, \quad t > 0$$

Εδώ μπορώ να κάνω έναν έλεγχο για την ειδική περίπτωση της ομογενούς σ.δ Poisson. Δεν εξασφαλίζει ότι είναι σωστό, αλλά θα καταλάβουμε αν είναι λάθος.

Όταν $\lambda(t) = \lambda$ (ομογ. σ.δ Poisson)

$$f_{S_n}(t) = \lambda \cdot \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

↑

σ.π.π Gamma (n, λ) OK

④ Άσκηση

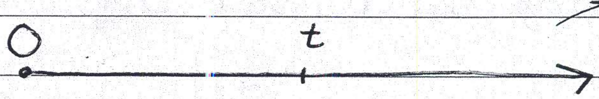
$\{N(t)\}$ μη-ομογ σ.δ Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$.

$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du$

S_n: χρόνος n-οστού γεγονότος

$P(S_1 \leq x \mid N(t)=1) = ?$, $E[S_1 \mid N(t)=1] = ?$

$f_{S_1 \mid N(t)=1}(x) = ?$



Για $x > t$ η πιθ είναι 1 αφού $N(t)=1$. Άρα νοιάζει για $0 \leq x \leq t$

$$P(S_1 \leq x \mid N(t)=1) = P(N(x) \geq 1 \mid N(t)=1) \quad , \; 0 \leq x \leq t$$

$$= \frac{P(N(x) \geq 1, N(t)=1)}{P(N(t)=1)}$$

$$\overset{0 \leq x \leq t}{=} \frac{P(N(x)=1, N(t)=1)}{P(N(t)=1)}$$

$$= \frac{P(N(x)=1, N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$$\overset{\text{ανεξ. προσαυξ.}}{=} \frac{P(N(x)=1)\,P(N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\Lambda(x)}} \cdot \frac{\Lambda(x)^1}{1!} \cdot \cancel{e^{-(\Lambda(t)-\Lambda(x))}} \cdot \frac{(\Lambda(t)-\Lambda(x))^0}{0!}}{\cancel{e^{-\Lambda(t)}} \cdot \frac{\Lambda(t)^1}{1!}}$$

$$= \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)} , \quad 0 \leq x \leq t .$$

Άρα $F_{S_1|N(t)=1}(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)} & , 0\le x\le t \\ 1 & , x>t \end{cases}$

και όμοια αν θέλω ελέγχω για την περίπτωση της ομογενούς.

$$f_{S_1|N(t)=1}(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \text{ ή } x>t \\ \frac{\lambda(x)}{\Lambda(t)}, & 0\le x\le t \end{cases}$$

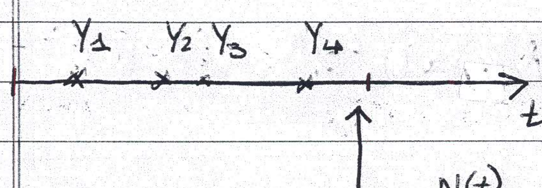
$$E[S_1 | N(t)=1] = \frac{\int_0^t x\lambda(x)dx}{\Lambda(t)}$$

Στην ομογ. σδ Poisson <u>OK</u>

⑤ <u>Ορισμός</u>

Έστω $\{N(t)\}$ σ.δ Poisson ρυθμού λ και $Y_1, Y_2, \ldots$ ανεξ και ισον. τμ, ανεξ από την $\{N(t)\}$ με κατανομή $F(y)$.

Η σ.δ $\{Y(t)\}$ με $Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ λέγεται σύνθετη σδ Poisson



$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

⑥ <u>Άσκηση:</u>

Παρέες φθάνουν σε μια ταβέρνα σύμφωνα με μια διαδ. Poisson ρυθμού 6 παρέες/ώρα.
Κάθε παρέα έχει j άτομα με πιθανότητα $\left(\frac{1}{2}\right)^j$, $j \geq 1$.

Να βρεθεί:

i) Το μέσο πλήθος ατόμων που φθάνουν στην ταβέρνα σε 2 ώρες

ii) Η πιθανότητα να φθάσουν συνολικά κ άτομα σε 3 ώρες.

→ Μονάδα χρόνου : 1 h
→ $\{N(t)\}$: σ.δ αφίξεων παρεών . Poisson με ρυθμό 6
→ $\{Y(t)\}$: σ.δ. αφίξεων ατόμων. Σύνθετη Poisson

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

i) → $E[Y(2)] = ?$

ii) → $P[Y(3)=k] = ?$

με $P(Y_i = j) = \left(\frac{1}{2}\right)^j$, $j \geq 1$

$$E[Y(2)] = E\left[\sum_{i=1}^{N(2)} Y_i\right]$$

$$= E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(2)} Y_i \mid N(2)\right]\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(2)=n)\, E\left[\sum_{i=1}^{N(2)} Y_i \mid N(2)=n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(2)=n)\, n\, E[Y]$$!

$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$ Πάντα.

Αν N τ.μ. τότε: όχι $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{N} E[X_i]$

Εκτός αν $N =$ σταθερή(n)

Και αν : i) $X_i \geq 0$ ή

ii) $E\left[\sum_{i=1}^{\infty} |X_i|\right] < \infty$ τότε :

$$E\left[\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X_i]$$

$$= E[N(2)]\, E[Y]$$
$$= 12 \cdot 2 = 24$$

διότι

$E[N(2)] = \lambda t = 6 \cdot 2$
$= 12$

και

$$E[Y] = \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

(*) $\sum_{j=0}^{\infty} t^j = \frac{1}{1-t}$, $|t| < 1$

$$\xrightarrow{d/dt} \sum_{j=1}^{\infty} j t^{j-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$\xrightarrow{\cdot t} \sum_{j=1}^{\infty} j t^j = \frac{t}{(1-t)^2}$$

$$\xrightarrow{(*)\ t=1/2} E[Y] = \frac{1/2}{(1-1/2)^2}$$

$$= 2$$

$$P_{N(t)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}}_{P(N(t)=n)} z^n = e^{-\lambda t(1-z)}$$

$$P_Y(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j z^j = \frac{\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}$$

$$P_{Y(3)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y(3)=k) z^k$$

$$P_{Y(3)}(z) = P_{N(3)}(P_Y(z))$$

$$= e^{-18\left(1 - \frac{\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}\right)}$$

$$= e^{-18 \cdot \frac{1-z}{1-\frac{z}{2}}}$$

Δεν αντιστρέφεται εύκολα, οπότε θα πηγαίναμε με συνεχείς παραγωγίσεις (τουλάχιστον για μικρές τιμές του k)

$$P(Y(3)=k) = \frac{d^k}{dz^k} P_{Y(3)}(z)$$

7 <u>Άσκηση:</u>

$\{N(t)\}$ σ.δ Poisson ρυθμού λ

$P(Y_i=j) = (1-p)p^j, \ j \geq 0$

$\{Y(t)\}$ με $Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$

Να βρεθεί: $Cov(Y(t), Y(t+s))$

$$Cov(Y(t), Y(t+s)) = E[Y(t) \cdot Y(t+s)] - E[Y(t)]\,E[Y(t+s)] \quad (1)$$

$$E[Y(t)Y(t+s)] = E[Y(t)(Y(t)+Y(t+s)-Y(t))]$$

$$= E[Y(t)^2] + E[Y(t)]\,E[Y(t+s)-Y(t)]$$

$$= E[Y(t)^2] + E[Y(t)]\,E[Y(s)]$$

Άρα $\mathrm{Cov}(Y(t),Y(t+s)) = E[Y(t)^2] + E[Y(t)]\,E[Y(s)] - E[Y(t)]\,E[Y(t+s)]$

$$E[Y(t)] = E\Big[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\Big]$$

$$= E[N(t)]\,E[Y_i]$$

$$= \lambda t \cdot \frac{p}{1-p}$$

$$E[Y(t)^2] = E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\Big)^2\Big] = E\Big[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le N(t)} Y_i Y_j\Big] = \ldots$$

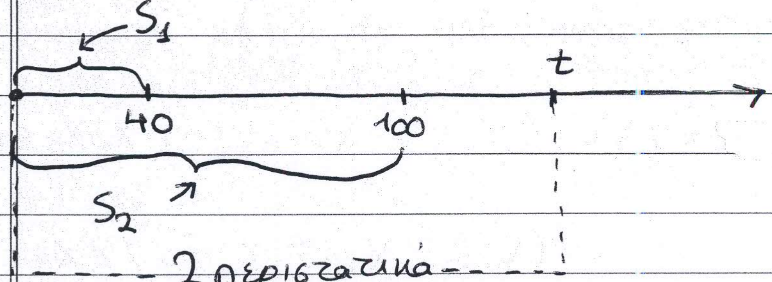
1/4/2013

Ασκήσεις στη σ.δ Poisson

① Άσκηση

Περιστατικά φθάνουν σε εξωτερικά ιατρεία σύμφωνα με μια σ.δ Poisson.
Γνωρίζουμε ότι:

- Το 1^{o} περιστατικό έφτασε στα πρώτα 40'
- Το 2^{o} " " " 100'
- Μέχρι τη χρονική στιγμή t, $(t>100)$ δεν έφτασε άλλο περιστατικό.



Ποιος ο μέσος χρόνος άφιξης του 1^{o} περιστατικού | πληροφορία δοθέντος της πληροφ. που διαθέτουμε.

Λύση:

$\{N(t)\}$ σ.δ Poisson των αφίξεων των περιστατικών ρυθμού λ.

$S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι γεγονότων

$$E[S_1 \mid S_1 \leq 40, S_2 \leq 100, N(t)=2] = ?$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{S_1}(x \mid S_1 \leq 40, S_2 \leq 100, N(t)=2)\, dx$$

$$f_{S_1}(x|\ldots) = \frac{d}{dx} F_{S_1}(x|\ldots)$$

$$F_{S_1}(x | S_1 \le 40, S_2 \le 100, N(t)=2) =$$

$$= P(S_1 \le x | S_1 \le 40, S_2 \le 100, N(t)=2)$$ αν $x > 40 \Rightarrow F_{S_1} = 1$

$$= \frac{P(S_1 \le x, S_2 \le 100, N(t)=2)}{P(S_1 \le 40, S_2 \le 100, N(t)=2)}, \quad 0 \le x \le 40$$

Πρέπει να υπολογίσω για $0 \le x \le 40$, $t > 100$ την

$P(S_1 \le x, S_2 \le 100, N(t)=2)$

Αν τα μεταφράσω σε $N(t) \Rightarrow$ ανεξ. προσαυξ.
σε X_i ανεξάρτητα $\Rightarrow$ ανεξ. χρόνοι γεγονότων
με ιδιοτ. δεσμ. χρόνων $\Rightarrow$ Διατεταγμένες από δείγμα ομοιόμορφων.

→ <u>1ος τρόπος</u> (= τα μεταφράζω όλα σε X_i)

$$P(S_1 \le x, S_2 \le 100, N(t)=2) =$$

$$= P(X_1 \le x, X_1 + X_2 \le 100, X_1 + X_2 \le t < X_1 + X_2 + X_3)$$

$$\overset{t>100}{=} P(X_1 \le x, X_1 + X_2 \le 100, t < X_1 + X_2 + X_3)$$

$$= \int_0^x P(X_2 \le 100 - x_1, X_2 + X_3 > t - x_1) \lambda e^{-\lambda x_1} dx_1$$

$$= \int_0^x \int_0^{100-x_1} \underbrace{P(X_3 > t - x_1 - x_2)}_{e^{-\lambda(t-x_1-x_2)}} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} dx_2 dx_1$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^x \int_0^{100-x} dx_2 dx_1$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^x (100 - x_1) dx_1$$

$$= \boxed{\lambda^2 e^{-\lambda t} \left(100x - \frac{x^2}{2}\right)}$$

→ 2ος τρόπος (= τα μεταφράζω όλα σε $N(t)$)

$P(S_1 \le x, S_2 \le 100, N(t)=2) =$

$= P(N(x) \geq 1, \overbrace{N(100) \geq 2, N(t)=2}^{\Rightarrow N(100)=2})$

$= P(N(x)=1 \text{ ή } 2, N(100)=2, N(t)=2)$ και σπάω το ενδεχόμενο σε δύο...

$= P(N(x)=1, N(100)=2, N(t)=2) + P(N(x)=2, N(100)=2, N(t)=2)$

$= P(N(x)=1, N(100)-N(x)=1, N(t)-N(100)=0) +$

$+ P(N(x)=2, N(100)-N(x)=0, N(t)-N(100)=0) =$

$$= e^{-\lambda x} \cdot \frac{(\lambda x)^1}{1!} \cdot e^{-\lambda(100-x)} \cdot \frac{(\lambda(100-x))^1}{1!} \cdot e^{-\lambda(t-100)} +$$

$$+ e^{-\lambda x} \cdot \frac{(\lambda x)^2}{2!} \cdot e^{-\lambda(100-x)} \cdot e^{-\lambda(t-100)} =$$

$$= \boxed{\lambda^2 e^{-\lambda t}\left(100x - \frac{x^2}{2}\right)}$$

• Καλύτερη ιδέα η μετάφραση σε $N(t)$

→ 3ος τρόπος (= χρησιμοπ. ιδιότητα διατεταγμένων χρόνων γεγονότ.)

$P(S_1 \le x, S_2 \le 100, N(t)=2) =$

$= P(N(t)=2) P(S_1 \le x, S_2 \le 100 \mid N(t)=2)$

$$= e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^2}{2!} \cdot P(U_{1:2} \le x, U_{2:2} \le 100)$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^2}{2!} \cdot \int_0^x \int_{u_1}^{100} \frac{2!}{t^2} \, du_2 \, du_1$$

$$= \boxed{\lambda^2 e^{-\lambda t}\left(100x - \frac{x^2}{2}\right)}$$

ΑΡΑ: $P(S_1 \le x, S_2 \le 100, N(t)=2) = \lambda^2 e^{-\lambda t}\left(100x - \frac{x^2}{2}\right)$, $0 \le x \le 40$

$\Downarrow$

$$F_{S_1}(x \mid S_1 \le 40, S_2 \le 100, N(t)=2) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \dfrac{100x - \frac{x^2}{2}}{4000 - \frac{40^2}{2}} & , 0 \le x \le 40 \\ 1 & , x>40 \end{cases}$$

και

$$f_{S_1}(x \mid \ldots) = \begin{cases} \dfrac{100-x}{3200} & , 0<x<40 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

ΑΡΑ: $E[S_1 \mid S_1 \le 40, S_2 \le 100, N(t)=2] = \int_0^{40} x \frac{100-x}{3200}\, dx$

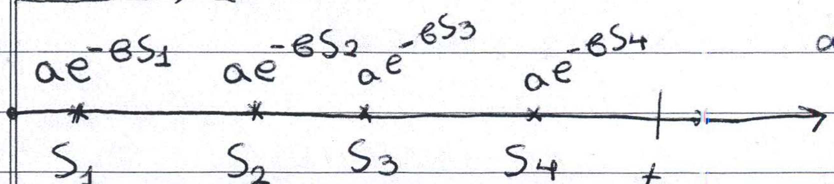
$= \ldots = 18,33$

• Ανεξάρτητο του λ και του t.
Μας έφτανε η πληροφορία

② Άσκηση

Πελάτες φθάνουν σε ένα σύστημα σύμφωνα με σ.δ Poisson(λ) και ο καθένας πληρώνει a χρηματικές μονάδες. 1 χρηματική μονάδα που εισπράττεται t μονάδες χρόνου αργότερα έχει τρέχουσα αξία $e^{-\theta t} = \gamma^t$.
↳ αποπληθωριστής

Να βρεθεί η μέση τρέχουσα αξία των εισπράξεων στο $[0,t] = c(t)$



π.χ.) $a = 5$ € τιμή εισιτηρίου
αν $\gamma = 0,8$, μετά από t χρόνια $\longrightarrow$ $5 \cdot 0,8^t$ €.
Τρέχουσα αξία

$$c(t) = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} a e^{-\beta S_i}\right]$$

$\rightarrow$ άθροισμα όπου $N(t)$ τ.μ $\Rightarrow$ Δεσμεύω στο $N(t)$

$$= a\, E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-\beta S_i}\right]$$

$$= a\, E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} e^{-\beta S_i} \,\middle|\, N(t)\right]\right]$$

$$= a \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, E\left[\sum_{i=1}^{N(t)=n} e^{-\beta S_i} \,\middle|\, N(t)=n\right]$$

$$= a \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, E\left[\sum_{i=1}^{n} e^{-\beta U_{i:n}}\right]$$

$\rightarrow$ Συμμετρική συνάρτηση άρα....

όπου $(U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n})$ είναι οι διατεταγμένες τμ από τυχαίο δείγμα (=ανεξάρτητες και ισόνομες) από την ομοιόμορφη $Unif([0,t])$.

$$= a \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, E\left[e^{-\beta U_{1:n}} + e^{-\beta U_{2:n}} + \dots + e^{-\beta U_{n:n}}\right]$$

$$= a \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, n\, E\left[e^{-\beta U}\right]$$

$$U \sim Unif([0,t])$$

$$= a \cdot \lambda t \cdot E\left[e^{-\beta U}\right]$$

$$= a \lambda t \int_0^t e^{-\beta u} \underbrace{f_U(u)}_{=1/t}\, du$$

$$= \lambda a \cdot \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}$$

③ Άσκηση 3 / Φυλ 3

$\{N(t)\}$ σ.δ Poisson με ρυθμό λ
$S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι των γεγονότων

Μέσος χρόνος πραγματοποίησης τελευταίου γεγονότος πριν τη στιγμή t. $= E[S_{N(t)}]$

$$E[S_{N(t)}] = E\big[E[S_{N(t)} \mid N(t)]\big]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, E\big[\underbrace{S_{N(t)} \mid N(t)=n}\big]$$

$(S_n \mid N(t)=n) \overset{d}{=} U_{n:n}$ = Η μεγαλύτερη τ.μ από n ανεξ. και ισόνομες τ.μ στο $[0,t]$.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, E[U_{n:n}] \quad \overset{*}{=} \frac{nt}{n+1}$$

$*$ $\left(\text{Γενικά: } E[U_{i:n}] = \dfrac{it}{n+1}\right)$

$$= t \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= t\left(1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n+1)!}\right)$$

$$= t\left(1 - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda t} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}}_{e^{\lambda t} - 1}\right)$$

$$= t\left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t}\right)$$

$$= \boxed{t - \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}}$$

④ Άσκηση 4 / Φυλ 3

$\{N(t)\}$ σ.δ Poisson

$S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι γεγονότων

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\right] \overset{?}{=}$$

$$= E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i \,\middle|\, N(t)\right]\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i \,\middle|\, N(t)=n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n) \cdot \underbrace{E\left[\sum_{i=1}^{n} U_{i:n}\right]}_{\substack{nE[U] \\ \shortparallel \\ \frac{nt}{2}}} \quad \text{ή} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{it}{n+1} = \frac{nt}{2}$$

$$= E[N(t)] \cdot \frac{t}{2}$$

$$= \frac{\lambda t^2}{2}$$

3/4/2013

Ασκήσεις Φυλλαδίου 2

(1) $\{N(t)\} \sim Poisson(\lambda)$

$P(N(t)=k \mid N(t+s)=k+m) = ?$ όπου $t \geq 0$, $s \geq 0$, $k \geq 0$, $m \geq 0$

$$P(N(t)=k \mid N(t+s)=k+m) = \frac{P(N(t)=k, N(t+s)=k+m)}{P(N(t+s)=k+m)}$$

$$= \frac{P(N(t)=k, N(t+s)-N(t)=m)}{P(N(t+s)=k+m)}$$

ανεξ. προσαυξ.

$$\overset{}{=} \frac{P(N(t)=k)\,P(N(t+s)-N(t)=m)}{P(N(t+s)=k+m)}$$

ομογ. προσαυξ.

$$= \frac{P(N(t)=k) \cdot P(N(s)=m)}{P(N(t+s)=k+m)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda s)^m}{m!}}{e^{-\lambda(t+s)} \cdot \frac{[\lambda(t+s)]^{k+m}}{(k+m)!}}$$

$$= \frac{t^k \cdot s^m}{(t+s)^{k+m}} \cdot \frac{(k+m)!}{k!\,m!}$$

$$= \binom{k+m}{k} \cdot \left(\frac{t}{t+s}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{t}{t+s}\right)^m \sim Bin\left(k+m, \frac{t}{t+s}\right)$$

② $\{N(t)\} \sim Poisson(\lambda)$

$P(N(t) = \text{περιττός}, t \geq 0) = ?$

Λύση: $P(N(t)=n) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

$$P(N(t)=\text{περιττός}) = \sum_{n \text{ περιττός}} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ P(N(t)=\text{περιττός}) + P(N(t)=\text{άρτιος}) = 1 \\ &\bullet\ P(N(t)=\text{άρτιος}) - P(N(t)=\text{περιττός}) \overset{*}{=} e^{-2\lambda t} \end{aligned}\right\} \rightarrow (\Sigma)$$

(το * προκύπτει ως εξής: $\sum_{n \text{ άρτιος}} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} - \sum_{n \text{ περιττός}} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} \overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

$\left.\begin{aligned} &n=0,2,4\ (+) \\ &n=1,3,5\ (-1) \end{aligned}\right\}$ Εναλλάξ πρόσημα

$$= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda t}$$

$$= e^{-2\lambda t}$$

Και λύνουμε το σύστημα (Σ).

(3) 2 εξαρτήματα σε ένα σύστημα.
Το σύστημα χαλάει, μόλις χαλάσει 1 από αυτά.

- Χρόνος ζωής 1ου εξαρτήματος $\to X \sim exp(\lambda)$

$$f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

- $\underbrace{\text{Χρόνος ζωής}}_{\text{ανεξ}}$ 2ου εξαρτήματος $\to Y \sim Gamma(n, \mu)$

$$f_2(t) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \mu^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\mu t}$$

T = χρόνος ζωής συστήματος
$= \min\{X, Y\}$

$$E[T] = \int_0^\infty P(T>t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty P(\min\{X,Y\}>t)\,dt$$

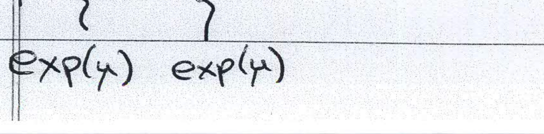
$$= \int_0^\infty P(X>t \text{ και } Y>t)\,dt$$

$$\overset{\text{ανεξ}}{=} \int_0^\infty P(X>t)P(Y>t)\,dt \quad (1)$$

- $P(X>t) = e^{-\lambda t}$
- $P(Y>t) = ?$

$$Gamma(n,\mu) = \underbrace{exp(\mu) + exp(\mu) \ldots + exp(\mu)}_{n \text{ ανεξ.}}$$

Έστω $Z(t) \sim Poisson(\mu)$



Y ~ χρόνος μέχρι το n-οστό γεγονός της Z(t)

$P(Y>t) = P($χρόνος ως το n-οστό γεγονός $> t)$

$= P($ως τη στιγμή t έχουν συμβεί το πολύ $n-1$ γεγον$)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu t} \cdot \frac{(\mu t)^k}{k!}$$

Έτσι η (1) $\Leftrightarrow E[T] = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu t} \cdot \frac{(\mu t)^k}{k!} \, dt$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu^k}{k!} \cdot \int_0^\infty t^k \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \, dt$$

Προσπαθούμε να το "σουλουπώσουμε" ώστε να εμφανιστεί μέσα στο ολοκλήρωμα η γάμμα που θέλουμε.

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu^k}{k!} \cdot \frac{k!}{(\lambda+\mu)^{k+1}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{(\lambda+\mu)^{k+1}}{k!} \cdot t^k \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \, dt}_{1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu^k}{(\lambda+\mu)^{k+1}} = \frac{1}{\lambda+\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^k$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n}{1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \left[1 - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n\right]$$

β' τρόπος

$X \sim \exp(\lambda)$

(1º εξάρτημα, κανονικά...)

2º εξάρτημα → η συνιστώσες

$\boxed{Y} \to Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ → χαλάνε σε εκθετικούς χρόνους η κάθε μια

δουλεύει Y_1 → χαλάει σε $\exp(\mu)$ → δουλεύει η Y_2 κτλ...

$Z_n = Y_1 + \ldots + Y_n$

$T_n = \min\{X, Z_n\}$

Ανάλυση 1ου βήματος :

ας πούμε ότι δουλεύει το X και η Y_1 συνιστώσα του Y.

X ...
$Y_1 \; Y_2$ ...

Μπορεί να χαλάσει τώρα, είτε το X είτε το Y_1. Αν χαλάσει η Y_1, τότε θα πάμε στην Y_2. Δηλ θα δουλεύει το X με την Y_2. Πάλι εκεί μπορεί να χαλάσει η X ή η Y_2 κτλ...

→ το min, θα περάσει τόσος χρόνος σίγουρα ότι και να γίνει

χαλάει η Y_1 οπότε το σύστημα δουλεύει με την Y_2 συνιστώσα.

$$E[T_n] = \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot 0 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot E[T_{n-1}]$$

→ χαλάει η X οπότε χαλάει το σύστημα

$$E[T_n] = \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot E[T_{n-1}]$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\left\{\frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot E[T_{n-2}]\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{(\lambda+\mu)^2} + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2\cdot E[T_{n-2}]$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^3} + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^3 E[T_{n-3}]$$

$$= \dots$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\mu^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}} + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1} E[T_1]$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\mu^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}} + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\lambda+\mu}$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} \cdot \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^j + \frac{\mu^{n-1}}{(\lambda+\mu)^n}$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1}}{1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}} + \frac{\mu^{n-1}}{(\lambda+\mu)^n} = \frac{1}{\lambda}\left[1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n\right]$$

(4) Poisson με ρυθμό 8 πελάτες/ώρα

α) E, Var του # πελατών σε 1 οκτάωρο.

$E[N(8)] = \lambda t = 8 \cdot 8 = 64$

$Var[N(8)] = 64$

β) P(κανείς δεν ήρθε τα 15 τελευταία λεπτά) = ?

ομογ. προσαυξ.

$\overset{}{=}$ P(κανείς στα 15 πρώτα λεπτά)

$$= P(N(1/4)=0) = e^{-8\cdot\frac{1}{4}} \cdot \frac{(8\cdot\frac{1}{4})^0}{0!}$$

$$= e^{-2}$$

Λύσαμε μεταξύ 9-11 και μεταξύ 9-10 (αντί για 10-11) κατά λάθος. Θα έβγαινε το ίδιο αποτέλεσμα, αλλά με αλλαγή στους δείκτες.

γ) $\mathrm{Cov}(\underbrace{N(3)-N(1)}_{9-11\pi\mu}, \underbrace{N(2)-N(1)}_{10-11\pi\mu}) =$

$= \mathrm{Cov}\big(N(3)-N(2)+N(2)-N(1), N(2)-N(1)\big)$

$= \mathrm{cov}\big(\overset{10-11}{N(3)-N(2)}, N(2)-N(1)\big) + \mathrm{cov}\big(N(2)-N(1), N(2)-N(1)\big)$, με τον πρώτο όρο $= 0$

ανεξάρτητες, άρα ασυσχέτιστες, άρα = μηδέν

$= \mathrm{cov}\big(N(2)-N(1), N(2)-N(1)\big)$

$= \mathrm{Var}\big(N(2)-N(1)\big)$

ομογ. προσαυξ $= \mathrm{Var}(N(1))$

$= 8 \cdot 1 = 8$

ανεξάρτητες ⟹ ασυσχέτιστες ⟹ cov = 0

δ) $\mathrm{Cov}(\#\text{πελ } 09^{00}-11^{00}, \#\text{πελ } 10^{00}-11^{00} \text{ την άλλη μέρα}) = 0$

(*) Extra: πως θα υπολογίζαμε πχ την:

ΣΩΣΤΟ

$P(N(t)=k, N(2t)=m) \overset{(*)}{=} P(N(t)=k, N(2t)-N(t)=m-k)$

$\overset{\text{ανεξ. προσαυξ}}{=} P(N(t)=k) \cdot P(N(2t)-N(t)=m-k)$

$\overset{\text{ομογ. προσαυξ}}{=} P(N(t)=k) \cdot P(N(t)=m-k)$

ΛΑΘΟΣ

κάποιοι γράφουν αυτό το οποίο είναι λάθος

(*) $= P(N(t)=k, N(t)=m-k) = 0$ για $m \neq 2k$

$= P(N(t)=k) \cdot P(N(t)=m-k)$

Ακόμα κι αν με "πράξεις" βγαίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Δε γίνεται το $N(t)$ να είναι ταυτόχρονα k και $m-k$!

⑤ $\{N_1(t)\} \sim Poisson(\lambda_1)$

ανεξάρτητες

$\{N_2(t)\} \sim Poisson(\lambda_2)$

$A_i = \#$ γεγονότων της $\{N_i\}$ έως το $1^{ο}$ γεγονός της άλλης

α) Κατανομές

β) Ανεξ οι δύο κατανομες? ΝΑΙ ή ΟΧΙ?

α) $$P(A_1=n) = \int_0^\infty P(A_1=n \mid 1^{ο} \text{γεγ. της } 2^{ης} = x)\cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\,dx$$

(χρόνος)

$$= \int_0^\infty P(N_1(x)=n)\cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda_1 x}\cdot \frac{(\lambda_1 x)^n}{n!}\cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 x}\,dx$$

$$= \frac{\lambda_1^n \cdot \lambda_2}{n!}\int_0^\infty x^n \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\,dx$$

Πάλι το "ίδιο" ∫ οπότε θέλουμε να εμφανίσουμε την Gamma κατανομή...

$$= \frac{\lambda_1^n \cdot \lambda_2}{n!}\cdot \frac{n!}{(\lambda_1+\lambda_2)^{n+1}}\int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^{n+1} x^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}}_{=1}\,dx$$

$$= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right) \sim Geom\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

(Αντίστοιχα η $P(A_2=n) \sim Geom\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$)

β) Δεν είναι ανεξάρτητες πχ $A_1 = 1 \implies A_2 = 0$

Και δίνουμε ένα παράδειγμα

Άσκηση Φυλ ③

① $\{N(t)\} \sim Poisson(\lambda)$

$P(N(1)=1, N(2)=2, N(3)=3, \ldots, N(n)=n) = ?$ ← Σπάμε ώστε να δημιουργήσουμε ανεξάρτητες προσαυξήσεις..

$= P(N(1)=1, N(2)-N(1)=1, N(3)-N(2)=1, \ldots, N(n)-N(n-1)=1)$

$\overset{\text{ανεξ προσαυξ}}{=} P(N(1)=1) \cdot P(N(2)-N(1)=1) \cdot \ldots \cdot P(N(n)-N(n-1)=1)$

$\overset{\text{ομογ. προσαυξ}}{=} [P(N(1)=1)]^n$

$= \left(e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!}\right)^n$

Άσκηση Φυλλάδιο 3 8/4/2013

(2) $\{N(t)\} \sim Poisson(\lambda)$ // $E[N(1)\cdot N(2)\cdot N(3)] = ?$

$$= E[N(1)\cdot\{(N(2)-N(1))+N(1)\}\{(N(3)-N(2))+(N(2)-N(1))+N(1)\}]$$

$$= E[N(1)\cdot(N(2)-N(1))(N(3)-N(2))] + E[N(1)(N(2)-N(1))^2] +$$

$$+ E[(N(1))^2(N(2)-N(1))] + \dots + E[(N(1))^3]$$

$$= E[N(1)\cdot E[N(2)-N(1)]\cdot E[N(3)-N(2)] + E[N(1)]\cdot E[N(1)^2] + E[N(1)]E[N(1)^2]$$

$$= \dots\dots =$$

ανεξ

$$= (E[N(1)])^3 + 4\cdot E[N(1)]\cdot E[(N(1))^2] + E[(N(1))^3]$$

- $E[N(1)] = \lambda\cdot 1 = \lambda$
- $E[(N(1))^2] = Var(N(1)) + (E[N(1)])^2 = \lambda + \lambda^2$
- $E[(N(1))^3] = \sum_{x=0}^{\infty} x^3 \cdot e^{-\lambda}\cdot \frac{\lambda^x}{x!}$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x^2\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

Θέτω: $x-1=k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{k+1}}{k!}$$

$$= \lambda\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2 e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda\cdot E[(N(1)+1)^2]$$

$= \lambda \cdot \{ E[(N(1))^2] + 2E[N(1)] + 1 \}$

$= \lambda \cdot \{ \lambda + \lambda^2 + 2\lambda + 1 \}$

$\Rightarrow E[N(1) \cdot N(2) \cdot N(3)] = (\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda) + 4\lambda(\lambda + \lambda^2) + \lambda^3$

<u>Φυλλάδιο 4</u>

① $\{N(t)\} \sim Poisson(\lambda)$

γεγονότα τύπου 1 με πιθ $1/3 \rightarrow N_1(t) \sim Poisson(\lambda/3)$
" " 2 " " $2/3 \rightarrow N_2(t) \sim Poisson(2\lambda/3)$
<u>ανεξάρτητες</u>

$N(t) \rightarrow$ υπέρθεση $N_1(t) + N_2(t)$

$P(N_1(3)=5, N(3)=11 \mid N_2(1)=4) =$

$$= \frac{P(N_1(3)=5, N(3)=11, N_2(1)=4)}{P(N_2(1)=4)}$$

$$= \frac{P(N_1(3)=5, N_2(3)=6, N_2(1)=4)}{P(N_2(1)=4)}$$

$$= \frac{P(N_1(3)=5) \cdot P(N_2(1)=4, N_2(3)=6)}{P(N_2(1)=4)}$$

$$= \frac{P(N_1(3)=5) \cdot P(N_2(1)=4, N_2(3)-N_2(1)=2)}{P(N_2(1)=4)}$$

ανεξ προσαυξ
$$= \frac{P(N_1(3)=5) \cdot P(N_2(1)=4) \cdot P(N_2(3)-N_2(1)=2)}{P(N_2(1)=4)}$$

αμογ ροσαυ} $= \dfrac{P(N_1(3)=5)\, P(N_2(1)=4)\, P(N_2(2)=2)}{P(N_2(1)=4)}$

$= \ldots$

(2) $\{N_1(t)\} \sim \text{Poisson}(3)$

$\{N_2(t)\} \sim \text{Poisson}(2)$

$\{N(t)\}$ η υπέρθεση $\sim \text{Poisson}(3+2)$

$$E[N_1(t) \mid N(t)=10] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(N_1(t)=n \mid N(t)=10)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{P(N_1(t)=n, N(t)=10)}{P(N(t)=10)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{P(N_1(t)=n, N_2(t)=10-n)}{P(N(t)=10)}$$

ανεξ} $$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{P(N_1(t)=n) \cdot P(N_2(t)=10-n)}{P(N(t)=10)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{\cancel{e^{-3t}} \cdot \frac{(3\cancel{t})^n}{n!} \cdot \cancel{e^{-2t}} \cdot \frac{(2\cancel{t})^{10-n}}{(10-n)!}}{\cancel{e^{-5t}} \cdot \frac{(5\cancel{t})^{10}}{10!}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \underbrace{\binom{10}{n} \left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{10-n}}_{\text{σπ Bin}}$$

$$= 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$$

③ $\{N(t)\} \sim Poisson(\lambda)$

γεγον τύπου $1 \to p$
" " $2 \to 1-p$

ανεξ $\begin{cases} N_1(t) \to \# \text{ τύπου } 1 \sim Poisson(\lambda p) \\ N_2(t) \to \# \text{ τύπου } 2 \sim Poisson(\lambda(1-p)) \end{cases}$

T_1, T_2 οι χρόνοι πρώτων γεγονότων

$$F_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2)$$

$$= P(N_1(t_1) \geq 1, N_2(t_2) \geq 1)$$

$$\overset{\text{ανεξ}}{=} P(N_1(t_1) \geq 1) \cdot P(N_2(t_2) \geq 1)$$

$$= (1-e^{-\lambda p t_1}) \cdot (1-e^{-\lambda(1-p) t_1})$$

④ κ είδη διαταραχών

διαταραχή τύπου $i \sim Poisson(\lambda_i)$
→ προκαλεί βλάβη με πθ p_i (ανεξ)

$\{N_i(t)\}$ διαδ. Poisson (λ_i), διαταραχές τύπου i

$\{M_i(t)\}$ διαδ Poisson $(\lambda_i p_i)$, διαταραχή τύπου i που προκάλεσε βλάβη.

$T \to$ χρόνος ζωής συστήματος

$\{M(t)\}$ υπέρθεση των $M_i(t) \sim Poisson\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i\right)$

Δηλαδή να πάθει βλάβη από οποιοδήποτε είδος βλάβης

T → πρώτο γεγονός της $\{M(t)\}$
S → είδος βλάβης

$P(T>t, S=i) =$

$= P(T>t)\cdot P(S=i \mid T>t)$

$$= \left(1-e^{-\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i p_i\right)t}\right)\cdot \frac{\lambda_i p_i}{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i p_i}$$

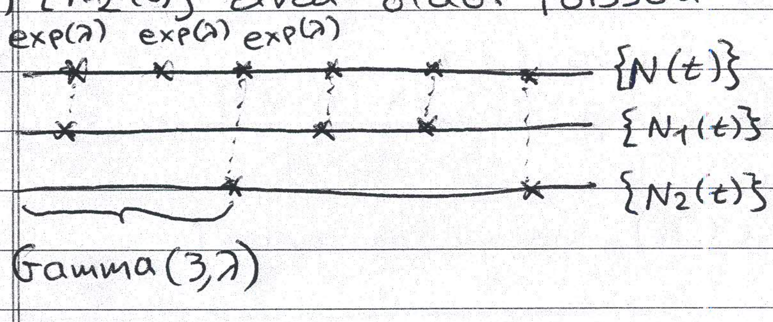
5) $\{N(t)\} \sim Poisson(\lambda)$

<u>κάθε γεγονός</u> καταγράφεται με πιθ $1/3$

→ $\{N_1(t)\} \sim Poisson(\lambda/3)$

$\{N_2(t)\}$ → καταγράφει 3ο, 6ο, 9ο γεγονός κτλ

a) $\{N_2(t)\}$ είναι διαδ. Poisson?



Η $\{N_2(t)\}$ δεν καταγράφει ανεξάρτητα από τις προηγούμενες

Η $\{N_2(t)\}$ <u>δεν</u> είναι διαδ. Poisson.

β) $P(N_1(t)=3 \mid N_2(t)=1) =$

$$= \frac{P(N_1(t)=3,\, N_2(t)=1)}{P(N_2(t)=1)}$$

$$= \frac{P(N_1(t)=3,\, N(t)=3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5)}{P(N(t)=3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5)}$$

$$= \frac{P(N_1(t)=3,\, N(t)=3) + \overbrace{P(N_1(t)=3,\, N(t)=4)}^{*} + P(N_1(t)=3,\, N(t)=5)}{\underbrace{P(N(t)=3)}_{e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^3}{3!}} + P(N(t)=4) + P(N(t)=5)}$$

(*) $P(N_1(t)=3,\, N(t)=4) = P(N_1(t)=3,\, \#\text{ γεγ. που δεν έχουν καταγραφεί} = 1)$

$$= P(N_1(t)=3)\cdot P(\#\text{ γεγ. που δεν έχουν καταγραφεί ως τότε} = 1)$$

$$= P(N_1(t)=3)\cdot P(\underbrace{\#\text{ γεγ. που δεν έχουν καταγραφεί ως τότε}}_{\sim \text{Poisson}} = 1)$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{3}t}\cdot\frac{\left(\frac{\lambda}{3}t\right)^3}{3!}\cdot e^{-\frac{2\lambda}{3}t}\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\lambda t\right)^1}{1!}$$