Στοχαστικές Μέθοδοι στην Ε.Ε

13/2/2013

Ώρες γραφείου: Δευτ. - Τετ. - Παρ 2-3 μμ

E-class ≃ 40 ασκήσεις + θα γίνουν extra!

Βιβλίο: Kulkarni: Modeling and Analysis of Stochastic Systems

Μέρη: 1) Διαδικασία Poisson (4 εβδ) γεγονότα ποιά #. γεγονότων στο χρόνο
2) Ανανεωτική Θεωρία (5 εβδ)
3) Εισαγωγή στις Ουρές Αναμονής (3 εβδ)
(+ 1,5 εβδ) στην αρχή βασικά από ΠΘ Ι.

Επανάληψη στις Πιθανότητες

Δεσμευμένη μέση τιμή

1. Δεσμευμένη σ.π και σ.π.π

- (X,Y) τμ $\longrightarrow f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$ σ.π, (X,Y) διακριτές

πθ η X να βρίσκεται κοντά στο x και η Y κοντά στο y δια το αντίστοιχο εμβαδό

$$\longrightarrow f_X(x,y) = \lim_{\substack{dx\to 0^+\\ dy\to 0^+}} \frac{P(x<X\le x+dx,\ y<Y\le y+dy)}{dx\,dy}$$

σ.π.π (X,Y) συνεχείς

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$ δεσμευμένη σ.π/σ.π.π της X δοθ. ότι $Y=y$

② Δεσμευμένη μέση τιμή

$$E[X/Y=y] = m_{X|Y}(y) = \begin{cases} \sum_x x\, f_{X|Y}(x/y), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x/y)\, dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

αριθμός που εξαρτάται από το y

Δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθ. ότι Y=y.

$$E[X|Y] = m_{X|Y}(Y)$$

Τυχαία μεταβλητή συνάρτηση της Y, "Δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθείσης της Y"

Η καλύτερη προσέγγιση της X από συνάρτηση της Y

③ Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής

$$E[X] = E[E[X|Y]] = E[m_{X|Y}(Y)]$$

$$= \begin{cases} \sum_y m_{X|Y}(y)\, f_Y(y), & Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} m_{X|Y}(y)\, f_Y(y)\, dy, & Y \text{ συνεχής} \end{cases}$$

$$m_{X|Y}(y) = E[X|Y=y]$$

ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιούμε.

4 Παράδειγμα

Τυχαίο πείραμα: Ρίψη ζαριού $\longrightarrow$ 1ο στάδιο

Ρίψη νομίσματος όσες φορές δείξει το ζάρι $\Big\}\longrightarrow$ 2ο στάδιο

X = # γραμμάτων που έφερε το νόμισμα

Με ενδιαφέρει η $E[X] = ?$ (Το ερώτημα είναι που βολεύει να δεσμεύσουμε)

Y = Αποτελ. ρίψης του ζαριού

αθρ. για τις πιθανές τιμές του ζαριού

δεσμεύω στην Y

y δοκιμές μθ επιτυχίας το $\frac{1}{2}$

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \sum_y E[X|Y=y]\cdot f_Y(y) = \sum_{y=1}^{6} \frac{y}{2}\,\frac{1}{6} =$$

$\hookrightarrow$ Μέση τιμή της $Bin(y, \frac{1}{2})$

$$= \frac{1}{12}\sum_{y=1}^{6} y = \frac{1}{\cancel{12}_{\,2}}\cdot\frac{\cancel{6}\cdot 7}{2} = \frac{7}{4}$$

5 Παράδειγμα

Νόμισμα φέρνει $K \longrightarrow$ μθ p

$\Gamma \longrightarrow$ μθ $1-p$

X = # ρίψεων μέχρι την 1η K

$E[X] = ?$

Α΄ τρόπος

$$f_X(x) = P(X=x) = (1-p)^{x-1}p \quad , x = 1, 2, \ldots$$

$$E[X] = \sum_x x f_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}p \overset{(*)}{=} \frac{1}{p}$$

$$\left(\sum_{x=0}^{\infty} t^x = \frac{1}{1-t} \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{x=1}^{\infty} x t^{x-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \right.$$

$$\left. \overset{t=1-p}{\Longrightarrow} \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} = \frac{1}{p^2} \overset{\cdot p}{\Longrightarrow} \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} p = \frac{1}{p} \right)$$

Β' τρόπος

$Y =$ αποτελ $1^{ης}$ ρίψης $\to$ Κ δηλ (1), $\to$ Γ δηλ (0)

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \sum_{y=0}^{1} E[X|Y=y]\, P[Y=y]$$

$$= (1-p) \underbrace{E[X|Y=0]}_{1+E[X]} + p \underbrace{E[X|Y=1]}_{1}$$

$$\Longrightarrow E[X] = (1-p)\cdot(1+E[X]) + p1$$

$$= 1 + (1-p) E[X]$$

$$\Longrightarrow \boxed{E[X] = \frac{1}{p}}$$

⑥ Παράδειγμα

n καπέλα — n άτομα.
Διαλέγουν στην τύχη με κλειστά μάτια.
Όσοι βρουν το δικό τους αποχωρούν. Οι υπόλοιποι συνεχίζουν κ.ο.κ.

$R_n =$ # γύρων μέχρι να φύγουν όλοι, ξεκινώντας με n άτομα

- $E[R_n] = ?$

- $E[R_1] = 1$

- $E[R_2] = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1}_{\text{Βρίσκουν κατευθείαν τα καπέλα τους στον 1ο γύρο}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(1 + E[R_2]\right)}_{\text{Δεν το βρήκαν την 1η φορά και ξανά από την αρχή.}}$

Άτομα:	1	2
Καπέλα:	1	2
	2	1

$\Longrightarrow E[R_2] = 2$

- $E[R_3] =$

$E[R_3 / \;\;] = 1$

$E[R_3 / \;\;] = 1 + E[R_2]$

	1	2	3	
1/6 ←	1	2	3	πήραν όλοι τα καπέλα
1/6 ←	1	3	2	1 πήρε το καπέλο του
1/6 ←	2	1	3	1 πήρε το καπέλο του
1/6 ←	2	3	1	κανείς δεν παίρνει το καπέλο του
1/6 ←	3	1	2	κανείς δεν παίρνει το καπέλο του
1/6 ←	3	2	1	1 πήρε το καπέλο του

$E[R_3] = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{3}{6}\cdot\left(1 + E[R_2]\right) + \frac{2}{6}\left(1 + E[R_3]\right)$

$\Rightarrow \frac{2}{3}E[R_3] = 1 + \frac{1}{2}\overset{2}{E[R_2]}$

$\Rightarrow E[R_3] = 3.$

Υποψιαζόμαστε πως όσα άτομα είμαστε περίπου τόσοι γύροι θα χρειαστούν ($E[R_n] = n$)

* $M = \#$ ανθρώπων που φεύγουν στον 1ο γύρο

$$E[R_n] = E[E[R_n | M]]$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \left(1 + E[R_{n-m}]\right) P[M=m]$$

$$= 1 + \sum_{m=0}^{n} E[R_{n-m}] P[M=m]$$

Εικασία

$E[R_n]=n$

Για $n=1$ ισχύει $E[R_1]=1$

Έστω ότι ισχύει για μέχρι το $n-1$

$E[R_i]=i$, $1\le i\le n-1$

$$E[R_n]=1+\sum_{m=1}^{n}(n-m)P(M=m)+E[R_n]P[M=0]$$

$$=1+n\cdot(1-P[M=0])-\overset{(*)\;''1}{E[M]}+E[R_n]P[M=0]$$

Άρα: $E[R_n](1-P[M=0])=n(1-P[M=0])$

$\Rightarrow E[R_n]=n$.

$$\boxed{\text{Άρα } E[R_n]=n,\ n=1,2,\dots}$$

(*) $M=\sum_{i=1}^{n} I_i$, $I_i=\begin{cases}1, & \text{αν ο } i \text{ πήρε το καπέλο του στον 1ο γύρο}\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$

$\Rightarrow E[M]=\sum_{i=1}^{n}E[I_i]=n\cdot\frac{1}{n}=1.$

(7) Παράδειγμα

Φυλακισμένος διαλέγει 1 πόρτα από 3
- 1 → Άμεση ελευθερία
- 2 → Πίσω στο κελί σε 10 μέρες
- 3 → " " " " 30 μέρες

Και μετά αμνησία και ξανά πόρτα...

$\underbrace{\text{Μέσο χρόνο ως την ελευθερία}}_{X}$

$E[X]=?$

Y = Πόρτα της $1^{ης}$ επιλογής

$$E[X] = \underbrace{P[Y=1]}_{=1/3} \underbrace{E[X \mid Y=1]}_{=0} + \underbrace{P[Y=2]}_{=1/3} \underbrace{E[X \mid Y=2]}_{=10+E[X]} + \underbrace{P[Y=3]}_{=1/3} \underbrace{E[X \mid Y=3]}_{=30+E[X]}$$

$$E[X] = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}(10+E[X]) + \frac{1}{3}(30+E[X])$$

$\Longrightarrow E[X] = \ldots\ldots$

(8) <u>Παράδειγμα</u>

Οι Α, Β μονομαχούν (εναλλάξ) μέχρι να σκοτωθεί κάποιος

$P(\text{ευστοχίας } A) = \frac{1}{2}$

$P(\text{ευστοχίας } B) = \frac{1}{3}$

$P(\text{επιβίωσης του } A \mid \text{αρχίζει ο } A)$.

$E[\#\ \text{γύρων της μονομαχίας} \mid \text{αρχίζει ο } A] = ;$

$P(\text{επιβ } A \mid \text{αρχίσει ο } A) = P_A \quad = ?$
$P(\text{επιβ } B \mid \text{άρχισε ο } A) = 1 - P_A = ?$
$P(\text{επιβ } A \mid \text{άρχισε ο } B) = 1 - P_B = ?$
$P(\text{επιβ } B \mid \text{άρχισε ο } B) = P_B = ?$

$E[\#\ \text{γύρων} \mid \text{άρχ ο } A] = \tau_A = ?$

$E[\#\ \text{γύρων} \mid \text{αρχ ο } B] = \tau_B = ?$

ΘΟΠ

$$\left.\begin{aligned} P_A &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}(1-P_B) \\ P_B &= \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}(1-P_A) \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{Σύστημα}} P_A=?,\ P_B=?$$

ΘΔΜΤ (για το # των γύρων)

$$\left.\begin{aligned} \tau_A &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}(1+\tau_B) \\ \tau_B &= \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}(1+\tau_A) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tau_A=?,\ \tau_B=?$$

18/2/2013

Στοιχεία από Πιθανότητες
Πιθανογεννήτριες και Μετασχηματισμοί L-S

① Ορισμός

X μη-αρνητική, ακέραια τότε ορίζουμε πιθανογεννήτρια της X να είναι:

$$P_X(z) = E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} P[X=n] z^n$$

② Ιδιότητες

1) $P_X(z)$ συγκλίνει τουλάχιστον στο $\{z : |z| \le 1\}$

2) $P[X=n] = \dfrac{P_X^{(n)}(0)}{n!}, \; n=0,1,\dots$

3) $P_X(z) = P_Y(z) \iff X, Y$ ιδόνομες

4) $P_X^{(n)}(1) = \underbrace{E[X(X-1)\dots(X-n+1)]}_{\text{Παραγοντική ροπή } n\text{-τάξης}}$

$$E[X] = P_X'(1)$$

προσθέτω και αφαιρώ X για να βγάλω

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$= E[X(X-1)] + E[X] - E[X]^2$$

$$= P_X^{(2)}(1) + P_X^{(1)}(1) - P_X^{(1)}(1)^2$$

③ Ιδιοτητες Αθροισμάτων 1

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ τμ

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Αν θέλω την σ.π της S_n είναι δύσκολο, εμπεριέχει κάποιο κόλπο.

σπ της $S_n = ?$

X, Y ανεξ $\quad P[X+Y=n] = \sum_{k=0}^{n} P[X=k]P[Y=n-k]$ Δύσκολο

(5) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ, ακερ ≥ 0

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$\Downarrow$

$$P_{S_n}(z) = P_{X_1}(z)\, P_{X_2}(z) \ldots P_{X_n}(z)$$

Αποδ:

$$P_{S_n}(z) = E[z^{S_n}] = E[z^{X_1} \cdot z^{X_2} \ldots z^{X_n}]$$

$$\overset{\text{ανεξ}}{=} E[z^{X_1}] \cdot E[z^{X_2}] \ldots E[z^{X_n}]$$

$$= P_{X_1}(z)\, P_{X_2}(z) \ldots P_{X_n}(z)$$

(4) $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ, ισον ακερ ≥ 0

N ακερ ≥ 0 ανεξάρτητη των X_i

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \text{σπ της } S_n = ;$$

Δύσκολο πρόβλημα αν δεν μεταφραστεί σε πιθανογεννήτρια!

Δύσκολο

$P(S_N=0) = P(N=0) + P(N=1)P(X=0) + P(N=2)P(X=0) + \dots$

κλπ.

(6) X_1, X_2, ανεξ, ισον αυτφ ≥ 0

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$, N αυτφ ≥ 0 ανεξ των X_i

$\Downarrow$

$P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z))$

Αποδ:

$P_{S_N}(z) = E[z^{S_N}] = E[E[z^{S_N}/N]]$

$= \sum_{n=0}^{\infty} E[z^{S_N}/N=n]\, P[N=n]$ ← δεσμευμένη μέση τιμή

$= \sum_{n=0}^{\infty} E[z^{X_1+\dots+X_n}]\, P[N=n]$

$= \sum_{n=0}^{\infty} P_X(z)^n\, P[N=n]$

$= P_N(P_X(z))$

(5) Βασικές δυναμοσειρές

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \ |z|<1$

δυωνυμικός αν $a, n \in \mathbb{Z}$ συντελεστής

$(1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n, \ |z|<1, \ a \in \mathbb{R}.$

$(a \in \mathbb{R}$

$= \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}$ = το καθοδικό παραγοντ. του a n τάξης

⑥ Παράδειγμα

$X_1 = \#$ IX που περνάνε σε 1 ώρα από διόδια

$X_2 = \#$ φορτηγών 〃 〃

$X_3 = \#$ μοτοσυκλετών 〃 〃

ανεξ

$X_1 \sim Poisson(100)$

$X_2 \sim Poisson(5)$

$X_3 \sim Poisson(20)$

$S_3 = X_1 + X_2 + X_3 \sim ?$

Γενικά αν $X \sim Poisson(\lambda)$ η πιθανογεννήτρια της:

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P[X=n] z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = \boxed{e^{-\lambda(1-z)}}$$

$S_3 = X_1 + X_2 + X_3$ → αφού αυτές είναι ανεξάρτητες, ισόν ≥ 0 και $\exists \in \mathbb{Z} \geq 0$.

Η πιθανογ. του αθρ. θα είναι το γινόμενο

$P[S_3 = n] = ?$

$$P_{S_3}(z) = P_{X_1}(z) P_{X_2}(z) P_{X_3}(z)$$

$$= e^{-100(1-z)} \cdot e^{-5(1-z)} \cdot e^{-20(1-z)}$$

$$= e^{-125(1-z)}$$

Άρα $S_3 \sim Poisson(125)$

$$\Rightarrow \boxed{P(S_3 = n) = e^{-125} \cdot \frac{(125)^n}{n!}}$$

(7) Παράδειγμα

ανεξ. $\left\{\begin{array}{l} X_1 \sim Geom(p_1), \quad P[X_1=n]=(1-p_1)p_1^n \\ X_2 \sim Geom(p_2), \quad P[X_2=n]=(1-p_2)p_2^n \end{array}\right. \quad , n=0,1,\dots$

$S = X_1 + X_2$

$P[S=n] = ?$

$$P_{X_1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P[X_1=n] = \sum_{n=0}^{\infty}(1-p_1)p_1^n z^n$$

$$= (1-p_1)\sum_{n=0}^{\infty}(p_1 z)^n$$

$$= \frac{1-p_1}{1-p_1 z}$$

$$P_{X_2}(z) = \frac{1-p_2}{1-p_2 z}$$

$$\Rightarrow P_S(z) = P_{X_1}(z)P_{X_2}(z) = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1 z)(1-p_2 z)}$$

Περίπτωση 1 $\quad p_1 \neq p_2$

$$P_S(z) = \frac{A}{1-p_1 z} + \frac{B}{1-p_2 z}$$

$$\frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-p_1 z)(1-p_2 z)} = \frac{A}{1-p_1 z} + \frac{B}{1-p_2 z} \overset{(*)}{=} \text{συνέχεια πίσω}$$

$$\xRightarrow{z=\frac{1}{p_1}} \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{\left(1-p_2\cdot\frac{1}{p_1}\right)} = A$$

και για το B:

$$\xRightarrow{z=\frac{1}{p_2}} \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{\left(1-p_1\cdot\frac{1}{p_2}\right)} = B$$

(*)

$$\circledast \quad P_S(z) = A\sum_{n=0}^{\infty}(\rho_1 z)^n + B\sum_{n=0}^{\infty}(\rho_2 z)^n$$

$$\Longrightarrow \boxed{P[S=n] = A\rho_1^n + B\rho_2^n \quad , n=0,1,\dots}$$

Περ 2: $\rho_1 = \rho_2$

$$P_S(z) = \frac{(1-\rho)^2}{(1-\rho z)^2} = (1-\rho)^2 \cdot (1-\rho z)^{-2} = (1-\rho)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n}(-\rho z)^n =$$

$$= (1-\rho)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\rho^n z^n$$

$$\Longrightarrow \boxed{P[S=n] = (n+1)\rho^n(1-\rho)^2 \quad n=0,1,\dots}$$

(8) Ορισμός Μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes

$X \geq 0$ Τότε ο μετασχ LS της X

$$\tilde{F}_X(s) = E[e^{-sX}] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f_X(x)\,dx , & X \text{ συνεχής} \leftarrow \text{σ.π.π} \\ \sum_x e^{-sx} f_X(x) , & X \text{ διακριτή} \leftarrow \text{σ.π} \end{cases}$$

$$\overset{\text{συχνά συναντάμε}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx}\, d\underset{\uparrow \text{σ.κ}}{F_X(x)}$$

(9) Ιδιότητες

1) $\tilde{F}_X(s)$ συγκλίνει για $Re(s) \geq 0$

2) $\tilde{F}_X(s) = \tilde{F}_Y(s) \Longrightarrow X, Y$ ισόνομες

3) $E[X^n] = (-1)^n \cdot \tilde{F}_X^{(n)}(0)$

ιδιότητες των πιθανογεννητριών.
ανάλογες

4) $\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \dots, X_n \text{ ανεξ } \geq 0 \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{F}_{S_n}(s) = \tilde{F}_{X_1}(s)\, \tilde{F}_{X_2}(s) \dots \tilde{F}_{X_n}(s)$

5) $\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \dots \text{ ανεξ, ισον } \geq 0 \\ N \text{ ανεξ των } X_i \text{, ακέραιος, } \geq 0 \\ S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{F}_{S_N}(s) = P_N(\tilde{F}_X(s))$

Απόδειξη της 3:

$$\tilde{F}_X(s) = E[e^{-sX}]$$

$$\Rightarrow (-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0) = E[X^n]$$

Απόδειξη της 4:

$$\tilde{F}_{S_n}(s) = E[e^{-sS_n}] = E[e^{-sX_1} \cdot e^{-sX_2} \dots e^{-sX_n}]$$

$$= E[e^{-sX_1}]\, E[e^{-sX_2}] \dots E[e^{-sX_n}]$$

$$= \tilde{F}_{X_1}(s) \cdot \tilde{F}_{X_2}(s) \dots \tilde{F}_{X_n}(s).$$

Απόδειξη της 5:

$$\tilde{F}_{S_N}(s) = E[e^{-sS_N}] = E[E[e^{-sS_N}/N]]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{-sS_N}/N=n]\, P[N=n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{F}_X(s)^n P[N=n]$$

(10) Παράδειγμα

X τμ, ακερ, ≥ 0

με πιθανογεννήτρια $P_X(z) = \dfrac{c-15z}{54-63z+18z^2}$

$P(X=n) = ?$, $n = 0, 1, \ldots$

$\boxed{P_X(1) = 1 \Rightarrow c = 24}$ → γιατί: $P_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) = 1$

$$\Rightarrow P_X(z) = \frac{24-15z}{54-63z+18z^2} = \frac{24-15z}{18(2-z)(\frac{3}{2}-z)} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{\frac{3}{2}-z}$$

$$\Rightarrow \left(A = \frac{2}{3}, B = \frac{1}{6}\right) \quad (*)$$

Αντιστροφή πιθανογεννήτριας (ρητής) με μία άγνωστη παράμετρο

1ο) $P_X(1) = 1 \Rightarrow$ Βρίσκω την παράμετρο

2ο) Παραγοντοποιώ τον παρονομαστή

3ο) Ανάλυση σε απλά κλάσματα

(*) $\Rightarrow$ Άρα $P_X(z) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2-z} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{\frac{3}{2}-z}$ → Τώρα πρέπει να το φέρω σε τέτοια μορφή ώστε να χρησιμοποιήσω τη γεωμετρική σειρά.

4ο) Χρησιμοποιώ τη γεωμετρική σειρά

$$P_X(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{2z}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{1}{9} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2z}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P[X=n] z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] z^n.$$

$$\Rightarrow P[X=n] = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

25/2/2013

Εκθετική Κατανομή

① Το μοντέλο

X τ.μ να μοντελοποιεί χρόνο (ζωής) χωρίς γήρανση
Αμνήμονη ιδιότητα

i) $X \geq 0$

ii) X συνεχής

iii) $P(X>s+t \mid X>s) = P(X>t)$

Τι σ.π.π θα έχει μια τέτοια τ.μ;

Έστω $g(t) = P(X \geq t)$ = συνάρτηση επιβίωσης

i) $g(0)=1$

ii) $g(t)$ παραγωγίσιμη

iii) $g(s+t) = g(s)g(t)$

Οι 3 ιδιότητες που απαιτώ να έχει αυτή η συνάρτηση επιβίωσης.

$$P(X>s+t \mid X>s) = P(X>t) \quad \Delta\eta\lambda.$$

$$\frac{P(X>s+t)}{P(X>s)}$$

$n=1,2,\ldots$

$$g(n) = g(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}) = g(1)^n, \quad n=1,2,\ldots$$

$m=1,2,\ldots$

$$g(1) = g(\underbrace{\tfrac{1}{m}+\tfrac{1}{m}+\ldots+\tfrac{1}{m}}_{m}) = g\left(\tfrac{1}{m}\right)^m, \quad m=1,2,\ldots$$

$\Downarrow$

$$g\left(\tfrac{1}{m}\right) = g(1)^{1/m}, \quad m=1,2,\ldots$$

$n, m = 1, 2, \ldots$

$$g\left(\frac{n}{m}\right) = g\Big(\underbrace{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\ldots+\frac{1}{m}}_{n}\Big) = g\left(\frac{1}{m}\right)^{n} = g(1)^{\frac{n}{m}} \quad , m, n = 1, 2, \ldots$$

Άρα $g(q) = g(1)^{q}$, $q \in \mathbb{Q}$, $q \geq 0$

$x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ Τότε $\exists\, q_n \in \mathbb{Q}$, $q_n \geq 0 : q_n \to x$

$$g(x) = g\left(\lim_{n\to\infty} q_n\right) = \lim_{n\to\infty} g(q_n) = \lim_{n\to\infty} g(1)^{q_n} = g(1)^{x} = e^{\ln g(1)\cdot x} =$$

$$= e^{-\lambda x}, \quad \lambda = -\ln g(1) > 0$$

Άρα $P(X > x) = e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$

και άρα σ.κ $F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$

σ.π.π $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

(Δηλαδή η εκθετική κατανομή ορίζεται πολύ φυσικά.)

② Μετασχηματισμός LS - Ροπές

$X \sim Exp(\lambda)$

LS της X $\quad \tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF_X(x)$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)x}\, dx$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

Βλέπουμε ότι η εκθετική έχει πολύ απλές ροπές:

- $E[X^n] = (-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0) = \frac{n!}{\lambda^n}$, $n=1,2,\ldots$
- $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $E[X^2] = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

③ Περιγραφή τ.μ που αντιστοιχούν σε χρόνους ζωής.

$X \geq 0 \longrightarrow$ σ.κ. $F_X(x) = P(X \leq x)$

σ.π.π $f_X(x)$

συναρτ. επιβίωσης ή συναρτ. αξιοπιστίας $R_X(x) = P(X > x)$

Ποια η πιθανότητα να φτάσει πχ η λάμπα σε χρόνο ηλικίας x?

hazard rate = Δεσμευμένος ρυθμός βλάβης

$$\lambda_X(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x+\delta x \mid X > x)}{\delta x}$$

Πριν τη δέσμευση μας δίνει τη σ.π.π

Μαζί με τη δέσμευση: Ποια η πιθανότητα δεδομένου ότι έχει φτάσει σε ηλικία x να πεθάνει τώρα.

ορισμός δεσμ. πιθ. ~>

$$= \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x+\delta x)}{\delta x \cdot P(X > x)}$$

$$= \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} \quad \begin{array}{l} = -R_X'(t) \\ = R_X(x) \end{array}$$

Αν γνωρίζω το $\lambda_X(x)$ για την $X \geq 0$ τότε

$$\lambda_X(x) = \frac{-R_X'(t)}{R_X(t)} \Rightarrow -\lambda_X(t) = (\log R_X(t))'$$

$$\Rightarrow -\int_0^t \lambda_X(u)\,du = \log R_X(t) - \cancel{\log R_X(0)}^{\,0}$$

$$R_X(t) = e^{-\int_0^t \lambda_X(u)\cdot du}$$

$$F_X(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda_X(u) du}$$

$$f_X(t) = \lambda_X(t)\cdot e^{-\int_0^t \lambda_X(u) du}.$$

Η εκθετική είναι η μοναδική ≥ 0, συνεχής τμ με $\lambda_X(t)=\lambda$ σταθερά.

4) Ιδιότητες Εκθετικής Κατανομής

→ Να απομνημονεύσουμε όνεση στη χρήση τους και να είμαστε και σε θέση να τις αποδεικνύουμε.

1) Αμνήμονη: $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow P[X>s+t \mid X>s] = P[X>t]$

ή ισχυρή ιδιότητα Markov

2) Ισχυρή Αμνήμονη: $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \geq 0$ ανεξάρτητη της X

$$\Rightarrow P[X>t+Y \mid X>Y] = P[X>t]$$

3) Κατανομή του min: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες, $X_i \sim Exp(\lambda_i)$

$$\Rightarrow \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim Exp(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)$$

4) Δείκτη του min: $X_1, X_2, \ldots X_n$, ανεξάρτητες, $X_i \sim Exp(\lambda_i)$

$$\Rightarrow P(X_i = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$

Αν το εφαρμόσουμε για 2:

$\lambda_1 = 1 \xrightarrow{P} \frac{1}{3}$

$\lambda_2 = 2 \xrightarrow{P} \frac{2}{3}$

Η πιθανότητα να χαλάσει για κάθε i μονάδα.

Η διάρκεια μέχρι την οποία χάλασε, είναι ανεξάρτητη από το λόγο που χάλασε: / Μη διαισθητικό...

5) Ανεξαρτησίας κατανομής και δείκτη του min:

Για 2:
$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 99$

$X_1, X_2, \ldots X_n$ ανεξ, $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, $N =$ δείκτης i τέτοιος ώστε

$X_i = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \Rightarrow N, \min(X_1, \ldots, X_n)$ ανεξάρτητες

6) Αθροίσματος: $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Exp(\lambda)$ ανεξάρτητες

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(n, \lambda)$$

$$f_{S_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

7) Τυχαίο γεωμετρικό άθροισμα: $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \sim Exp(\lambda)$, ανεξάρτητες, N ανεξάρτητο των X_i

και

$$P(N=n) = (1-p)p^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow S_N \sim Exp(\lambda p)$$

5) Αποδείξεις:

1) Από ορισμό ✓

2) δεσμεύω καλύτερα στην Y ώστε να παρουσιάζεται η πιο εύκολη συνάρτηση επιβίωσης.

$$P[X > t+Y \mid X > Y] = \frac{P[X > t+Y]}{P[X>Y]} \underset{\theta.o.\pi}{=} \frac{\int_0^\infty P(X > t+y) f_Y(y)\,dy}{\int_0^\infty P(X>y) f_Y(y)\,dy}$$

$$= \frac{\int_0^\infty e^{-\lambda(t+y)} f_Y(y)\,dy}{\int_0^\infty e^{-\lambda y} f_Y(y)\,dy} = e^{-\lambda t} =$$

$$= P(X > t).$$

3) $P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > t) = P(X_1 > t, \dots, X_n > t)$

$$\overset{X_i \text{ ανεξάρτητες}}{=} P(X_1 > t) \cdot \ldots \cdot P(X_n > t)$$

$$= e^{-\lambda_1 t} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda_n t}$$

$$= e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t}$$

4) Για $n=2$ (η βασική ιδέα και γενικεύεται για περισσότερες)

X_1, X_2 ανεξάρτητες, $X_i \sim Exp(\lambda_i)$,

$$N = \begin{cases} 1, & X_1 = \min(X_1, X_2) \\ 2, & X_2 = \min(X_1, X_2) \end{cases}$$

$$P(N=1) = P(X_1 \leq X_2) = \int_0^\infty P(X_2 \geq x) f_{X_1}(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\,dx$$

$$= \lambda_1 \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}\,dx$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

5) Για $n=2$

$P(N=1, \min(X_1, X_2) > x) = P(x < X_1 \leq X_2)$ δεσμεύω ως προς X για τον ίδιο λόγο πάλι

$$= \int_x^\infty P(x < x_1 \leq X_2) f_{X_1}(x_1)\,dx_1$$

$$= \int_x^\infty e^{-\lambda_2 x_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}\,dx_1$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} = P(N=1) P(\min > x)$$

άρα είναι ανεξάρτητα

27/2/2013

Ασκήσεις Φυλλαδίου 1

(1) X χρόνος ζωής εξαρτήματος

$X \sim \exp(\lambda) \quad \left(f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x>0\right)$

Επιθεωρητής ελέγχει το εξάρτημα κάθε t χρονικές μονάδες

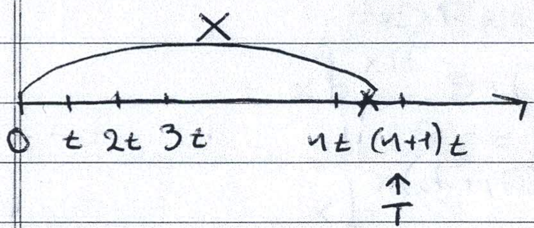
T: χρονική στιγμή που ο επιθεωρητής ανακαλύπτει ότι το εξάρτημα χάλασε.

$E(T) = ?$

Λύση:

$$E[T] = E[E[T|X]] = \int_0^\infty E[T|X=x]\, f_X(x)\, dx$$

όπου $E[T|X=x] = (n+1)t, \quad nt < x \leq (n+1)t$



Άρα
$$E[T] = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nt}^{(n+1)t} E[T|X=x]\, f_X(x)\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nt}^{(n+1)t} (n+1)t \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t \int_{nt}^{(n+1)t} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t \left[-e^{-\lambda x}\right]_{nt}^{(n+1)t}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t\, e^{-\lambda n t} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t\, e^{-\lambda (n+1) t}}_{n' = n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, t\, e^{-\lambda n t} - \sum_{n'=1}^{\infty} n' t\, e^{-\lambda n' t}$$

$$= \cancel{\sum_{n=0}^{\infty} n t e^{-\lambda n t}} + \sum_{n=0}^{\infty} t e^{-\lambda n t} - \cancel{\sum_{n=0}^{\infty} n t e^{-\lambda n t}}$$

$$= t \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda t}\right)^n$$

$$= t \frac{1}{1-e^{-\lambda t}}$$

<u>Παρατήρηση</u> (Αν ο επιθεωρητής κοιτάει συνέχεια το μηχάνημα, τότε η στιγμή/μέσος χρόνος που παρατηρεί ότι χάλασε, είναι ακριβώς η στιγμή/μέσος χρόνος που αυτό χάλασε)

Δηλαδή,

$$\lim_{t \to 0} E[T] = \lim_{t\to 0} \frac{t}{1-e^{-\lambda t}} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\lambda e^{-\lambda t}} = \frac{1}{\lambda} = E[X]$$

(2) - κάλπη με a λευκά και b μαύρα σφαιρίδια

- τραβάμε ένα σφαιρίδιο και:
  - αν είναι λευκό, το επανατοποθετούμε
  - αν είναι μαύρο, βάζουμε στη θέση του ένα λευκό.

- X_n: # λευκών σφαιριδίων στην κάλπη αφού το πείραμα επαναληφθεί n φορές.

a) Νδο: $E[X_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) E[X_n] + 1$

β) Να βρεθεί κλειστός τύπος για την $E[X_n]$

<u>Λύση:</u>

a) $E[X_{n+1}] = E[E[X_{n+1} | X_n]] = \sum_{x=a}^{a+b} E[X_{n+1} | X_n = x]\, f_{X_n}(x)$

όπου $E[X_{n+1}|X_n = x] = x \underbrace{P[X_{n+1} = x | X_n = x]}_{\text{πιθ. να τραβήξω λευκό δεδ. ότι τα λευκά είναι } x} + (x+1) \underbrace{P[X_{n+1} = x+1 | X_n = x]}_{\text{πιθ. να τραβήξω μαύρο δεδ. ότι τα λευκά είναι } x}$

$$= x \cdot \frac{x}{a+b} + (x+1) \cdot \frac{(a+b-x)}{a+b}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + ax + bx - \cancel{x^2} + a + b - x}{a+b}$$

$$= \frac{x(a+b-1) + a + b}{a+b}$$

$$= x\left(1 - \frac{1}{a+b}\right) + 1$$

Άρα $E[X_{n+1}] = \sum_{x=a}^{a+b} \left[x\left(1-\frac{1}{a+b}\right)+1\right] f_{X_n}(x)$

$$= \sum_{x=a}^{a+b} x\left(1-\frac{1}{a+b}\right) f_{X_n}(x) + \sum_{x=a}^{a+b} f_{X_n}(x)$$

$$= \left(1-\frac{1}{a+b}\right) \underbrace{\sum_{x=a}^{a+b} x \cdot f_{X_n}(x)}_{E[X_n]} + \underbrace{\sum_{x=a}^{a+b} f_{X_n}(x)}_{1} = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_n] + 1$$

β) $\boxed{E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_{n-1}] + 1}$

$$E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)\left[\left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_{n-2}]+1\right]+1$$

$$\boxed{E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^2 E[X_{n-2}] + \left(1-\frac{1}{a+b}\right) + 1}$$

$$E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^2 \left[\left(1-\frac{1}{a+b}\right)E[X_{n-3}]+1\right] + \left(1-\frac{1}{a+b}\right) + 1$$

$$\boxed{E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^3 E[X_{n-3}] + \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{a+b}\right) + 1}$$

Άρα: $E[X_n] = \left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n E[X_0] + \sum_{i=0}^{n-1} \left(1-\frac{1}{a+b}\right)$

$$E[X_n] = a\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n + \frac{1-\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n}{\cancel{1}-\left(\cancel{1}-\frac{1}{a+b}\right)}$$

$$E[X_n] = a\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n + a + b - (a+b)\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n$$

$$\boxed{E[X_n] = a + b - b\left(1-\frac{1}{a+b}\right)^n}$$

(3)

! Σε τέτοια προβλήματα, δεσμεύουμε ως προς την πρώτη φορά που συμβαίνει αυτό που "χαλάει" το πείραμα δηλαδή εδώ, να έρθουν γράμματα.

- ρίψη νομίσματος
- κεφαλή με πιθανότητα p
- γράμματα με πιθανότητα $1-p$

<u>Να βρεθεί</u>: ο μέσος αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθεί μια σειρά από r συνεχόμενες κεφαλές

X: # ρίψεων μέχρι r συνεχόμενες κεφαλές
$E[X] = ?$

Y: # ρίψης που εμφανίζεται για πρώτη φορά γράμματα

$Y \sim Geom(1-p)$
$f_Y(y) = p^{y-1}(1-p)$, $y=1,2,\ldots$

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \sum_{y=1}^{\infty} E[X|Y=y]\, f_Y(y) \quad \text{, όπου}$$

$$E[X|Y=y] = \begin{cases} r & , y \geq r+1 \\ y+E[X] & , y \leq r \end{cases}$$

Άρα $$E[X] = \sum_{y=1}^{r} (y+E[X])\,p^{y-1}(1-p) + \sum_{y=r+1}^{\infty} r\,p^{y-1}(1-p)$$

$$E[X] = (1-p)\sum_{y=1}^{r} y\,p^{y-1} + (1-p)E[X]\sum_{y=1}^{r} p^{y-1} + (1-p)r\sum_{y=r+1}^{\infty} p^{y-1}$$

όπου, $$\sum_{y=0}^{r} p^y = \frac{1-p^{r+1}}{1-p} \xrightarrow{d/dp} \sum_{y=1}^{r} y\,p^{y-1} = \frac{-(r+1)p^r(1-p)+1-p^{r+1}}{(1-p)^2}$$

και $$\sum_{y=1}^{r} p^{y-1} \underset{}{\overset{y'=y-1}{=\!=}} \sum_{y'=0}^{r-1} p^{y'} = \frac{1-p^r}{1-p}$$

και $\sum_{y=r+1}^{\infty} p^{y-1} \overset{y'=y-r-1}{=\!=\!=} \sum_{y'=0}^{\infty} p^{y'+r} = p^r \sum_{y'=0}^{\infty} p^{y'} = p^r \cdot \frac{1}{1-p}$

Άρα,

$$E[X] = \cancel{(1-p)} \cdot \frac{(r+1)p^r(1-p)+1-p^{r+1}}{(1-p)^{\cancel{2}}} + \cancel{(1-p)}\, E[X] \cdot \frac{1+p^r}{\cancel{1-p}} +$$

$$+ (1-p) r \frac{p^r}{1-p}$$

$$\Rightarrow (\cancel{1}-\cancel{1}+p^r) E[X] = \frac{-(r+1)p^r(1-p)+1-p^{r+1}+r(1-p)p^r}{1-p}$$

$$\Rightarrow p^r E[X] = \frac{-p^r \cancel{+p^{r+1}} + 1 \cancel{-p^{r+1}}}{1-p}$$

$$E[X] = \frac{1-p^r}{p^r(1-p)}$$

4

X μη αρνητική ακέραια τμ με πιθανογεννήτρια

$$P_X(z) = \frac{c}{6-z-z^2}$$

α) $c = ?$

β) $E[X] = ?$

γ) $f_X(x) = P[X=x]$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

δ) $P(X = \text{άρτιος})$

α) $P_X(1) = 1 \Rightarrow \frac{c}{6-1-1^2} = 1 \Rightarrow c = 4$

Άρα $P_X(z) = \frac{4}{6-z-z^2}$

β) $E[X] = P_X'(1)$

$$P_X'(z) = -\frac{4(-1-2z)}{(6-z-z^2)^2} = \frac{4+8z}{(6-z-z^2)^2}$$

$$E[X] = P_X'(1) = \frac{4+8}{(6-1-1)^2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

γ) $$P_X(z) = \frac{4}{(2-z)(3+z)} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{3+z} \quad (1)$$

Για το A:

$$(1) \xRightarrow{\times(2-z)} \frac{4}{3+z} = A + \frac{B(2-z)}{3+z}$$

$$\xRightarrow{z=2} \frac{4}{5} = A$$

Για το B:

$$(1) \xRightarrow{\times(3+z)} \frac{4}{2-z} = \frac{A(3+z)}{2-z} + B$$

$$\xRightarrow{z=-3} \frac{1}{3} = B$$

$$P_X(z) = \frac{4/5}{2-z} + \frac{4/5}{3+z}$$

$$P_X(z) = \frac{4/10}{1-\frac{z}{2}} + \frac{4/15}{1+\frac{z}{3}}$$

$$P_X(z) = \frac{2}{5}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{4}{15}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)}$$

$$P_X(z) = \frac{2}{5}\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^x + \frac{4}{15}\sum_{x=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^x$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot z^x + \frac{4}{15} \left(-\frac{1}{3}\right)^x z^x \right)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{4}{15} \left(-\frac{1}{3}\right)^x \right]}_{P(X=x)} z^x$$

Άρα $P[X=x] = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{4}{15} \left(-\frac{1}{3}\right)^x$

δ) $P(X = \text{άρτιος}) = \sum_{k=0}^{\infty} P[X=2k]$

$x=0,1,2,\ldots$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + \frac{4}{15} \left(-\frac{1}{3}\right)^{2k} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \frac{4}{15} \left(\frac{1}{9}\right)^k \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{5} \left(\frac{1}{9}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{15} \left(\frac{1}{9}\right)^k$$

$$= \frac{2}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k + \frac{4}{15} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{\frac{8}{9}}$$

$$= \frac{8}{15} + \frac{9}{30}$$

$$= \frac{25}{30}$$

$$= \frac{5}{6}$$

5

$$\left.\begin{array}{l} X \sim \exp(\lambda) \\ Y \sim \exp(\lambda) \\ Z \sim \exp(\mu) \end{array}\right\} \text{ ανεξάρτητες και } \lambda \neq \mu$$

1) $\tilde{F}_{X+Y+Z}(s) = ?$

2) $f_{X+Y+Z}(w) = ?$

1) $\tilde{F}_X(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda + s} = \tilde{F}_Y(s)$

$\tilde{F}_Z(s) = \dfrac{\mu}{\mu + s}$

$\tilde{F}_{X+Y+Z}(s) \overset{\text{ανεξ}}{=\!=} \tilde{F}_X(s)\,\tilde{F}_Y(s)\,\tilde{F}_Z(s) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+s}\right)^2 \cdot \dfrac{\mu}{\mu+s}$

2) $\tilde{F}_{X+Y+Z}(s) = \dfrac{A}{(\lambda+s)^2} + \dfrac{B}{\lambda+s} + \dfrac{\Gamma}{\mu+s}$

....