11.01.10 Καλή Χρονιά! 10ο μάθημα

Ύλη

Βιβλίο κ. Φακίνου + Ό,τι έχουμε κάνει στην τάξη.

1.7

2.1 - 2.6 (όχι το 2.7)

3.1 - 3.7

4.1 - 4.6 (το 4.5 είναι εκτός, δε θα πέσει κάτι από εκεί)

Μέθοδος Φάσεων

$$X \geq 0 \qquad Y = \begin{cases} X_1 & p_1 \\ X_1 + X_2 & p_2 \\ X_1 + X_2 + X_3 & p_3 \end{cases}$$

① Ιδέα

Κάθε μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή μπορεί να προσεγγισθεί οσοδήποτε καλά θέλουμε από μίξεις αθροισμάτων εκθετικών π.χ.

② Κατανομές Erlang

$X \sim Erlang(k, a) \iff X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k$, $Y_i \sim Exp(a)$ ανεξ.

$E[X] = \frac{k}{a}$, $Var[X] = \frac{k}{a^2}$, $f_X(x) = \frac{a^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-ax}$, $x > 0$ σ.π.π.

Έστω $Z_k \sim Erlang(k, ka)$

$E[Z_k] = \frac{k}{ka} = \frac{1}{a}$ (ίδια μέση τιμή), $Var[Z_k] = \frac{k}{(ka)^2} = \frac{1}{ka^2}$ ($Var \to 0$ καθώς $k \to \infty$)

③ Παράδειγμα $E_2|M|1$ ουρά

* Ανανεωτική διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ, ενδιάμεσους χρόνους $Erlang(2, 2\lambda)$
* $Exp(\mu)$ χρ. εξυπηρέτησης
* 1 υπηρέτης

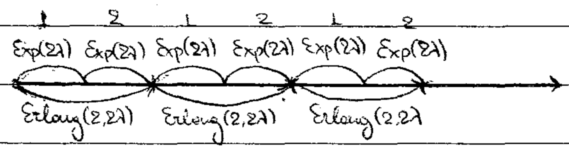
$Q(t) = \#$ πελ.

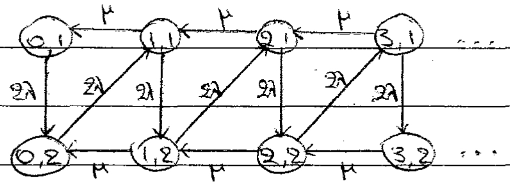
$R(t)$ = φάση άφιξης πελάτη

$\{(Q(t), R(t))\}$ Μαρκ ?

Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Χρόνος
$(0,1)$	$(0,2)$	$Exp(2\lambda)$
$(0,2)$	$(1,1)$	$Exp(2\lambda)$
$(n,1), n\geq 1$	$(n,2)$	$Exp(2\lambda)$
	$(n-1,1)$	$Exp(\mu)$
$(n,2), n\geq 1$	$(n+1,1)$	$Exp(2\lambda)$
	$(n-1,2)$	$Exp(\mu)$

Όλα Exp
άρα
$\{(Q(t), R(t))\}$
Μαρκ





Για να βρω την στάσιμη κατανομή, θα έγραφα τις εξισώσεις ισορροπίας της $(0,1)$, της $(0,2)$, και εξίσωση ισορροπίας των $(1,1)(2,1)(3,1)\ldots$ και των εξίσωση ισορροπίας των $(1,2)(2,2)(3,2)\ldots$ και μετά κλασικά δουλεύω με πιθανογεννήτριες!

④ Παράδειγμα $M \mid Er \mid 1 \mid 1$

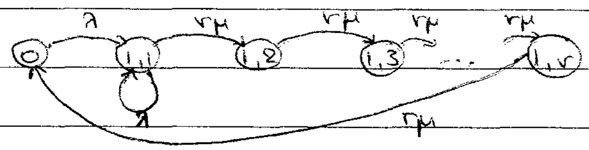
* Poisson (λ) διαδικασία αφίξεων
* Χρόνοι εξυπηρ. με ρυθμό μ Erlang $(r, r\mu)$
* 1 υπηρέτης
* χωρητικότητα 1

$Q(t)$ = # πελ.

$S(t)$ = φάση εξυπηρέτησης

$\{(Q(t), S(t))\}$ Μαρκ.

χ.κ. $\{0, (1,1), (1,2), \ldots, (1,r)\}$



$$\lambda p_0 = r\mu p_{1,r}$$

$$r\mu p_{1,1} = \lambda p_0$$

$$r\mu p_{1,j} = r\mu p_{1,j-1}, \quad 2 \leq j \leq r$$

$$\Downarrow$$

$$p_{1,1} = p_{1,2} = \ldots = p_{1,r} = \frac{\lambda}{r\mu} p_0$$

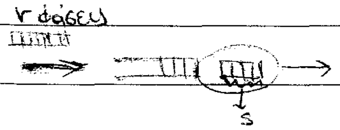
Εξίσωση κανονικοποίησης $p_0 + \sum_{j=1}^{r} p_{1,j} = 1 \Rightarrow p_0\left(1 + \frac{\cancel{r}\lambda}{\cancel{r}\mu}\right) = 1$

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$p_{1,j} = \frac{\lambda}{r\mu} \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{r(\lambda+\mu)}, \quad j = 1, 2, \ldots, r$$

⑤ Παράδειγμα Er | Es | 1 | 1 αρό

* Ανανεωτική διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ, ενδ. χρόνοι αφίξεων Erlang (r, rλ)
* Χρόνοι εξυπηρέτησης ρυθμού μ, χρ. εξυπηρέτησης Erlang (s, sμ)
* 1 υπηρέτης
* ∞ χωρητικότητα



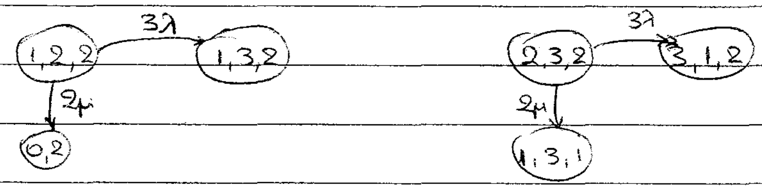
$Q(t) =$ # πελ.

$R(t) =$ φάση άφιξης του αφικν. πελ.

$S(t) =$ φάση εξυπηρ. του εξυπ. πελ.

π.χ. $S = \{(0,i) : i=1,2,\dots,r\} \cup \{(\underset{Q(t)}{m},\underset{R(t)}{i},\underset{S(t)}{j}) : m=1,2,\dots,\ i=1,2,\dots,r,\ j=1,2,\dots,s\}$

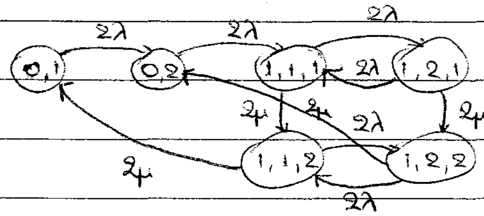
π.χ. $E_3 / E_2 / 1$



⑥ Παράδειγμα $E_2 | E_2 | 1 | 1$

* Ανανεωτική διαδικασία αφίξεων, ενδ. χρ. αφίξεων Erlang (2,2λ)
* Χρ. Εξυπ. Erlang (2,2μ)
* 1 υπηρέτης
* Χωρ. 1.

$Q(t)$ = # πελ.
$R(t)$ = φάση άφιξης
$S(t)$ = φάση εξυπηρέτησης

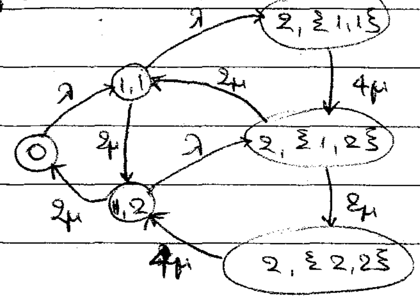


⑦ Παράδειγμα $M | E_2 | 2 | 2$

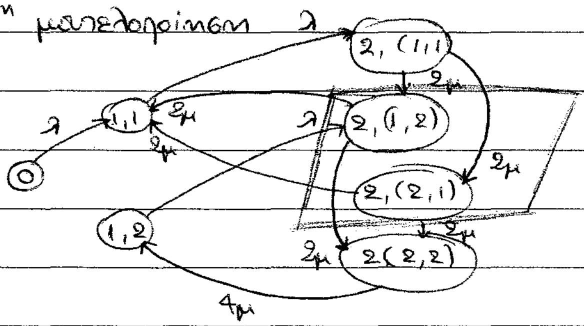
* Poisson Διαδ. Αφίξεων (λ), ενδ. χρ. ~ Exp(λ)
* Χρ. Εξυπ ~ Erlang (2,2μ)
* 2 υπηρέτες
* χωρητικότητα 2.

Καταστάσεις
0
(1,1)
(1,2) φάσεις
(2,{1,1}) Εξυπ.
(2,{1,2})
(2,{2,2})

1η μοντελοποίηση



2η μοντελοποίηση

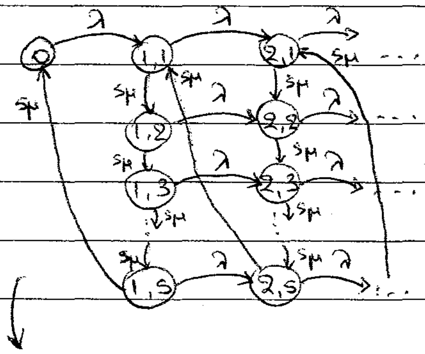


⑧ Η $M|E_s|1$ ουρά

* Poisson (λ) διαδ. αφίξεων
* Erlang ($s, s\mu$) χρ. εξυπ. (μέσος εξυπ = μ)
* 1 υπηρέτης
* ∞ χωρητικότητα

$Q(t)$ = # πελ. $\quad$ x, k

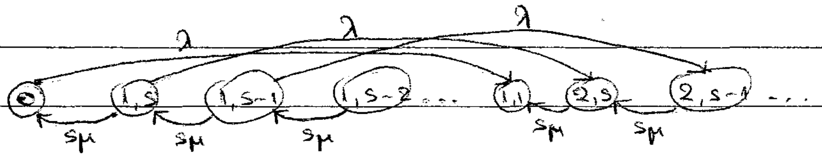
$S(t)$ = φάση εξυπηρ. $\quad$ $\{0, (1,1), (1,2) \ldots (1,s), (2,1), (2,2) \ldots (2,s), \ldots\}$



Λύση: Γράφω εξ. ισορροπίας για $p_0, p_{m,i}$

Ορίζω πιθανογεννήτριες $P_i(z) = \sum_{m=1}^{\infty} p(m,i) z^m$

κλπ.



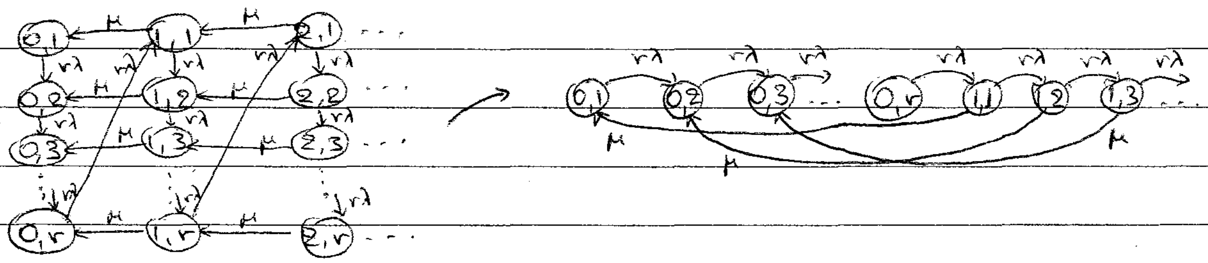
Μπορώ να βρω τη στάσιμη κατανομή του $\overset{\lambda}{M}|\overset{\mu}{E_s}|1$ συστήματος, δουλεύοντας με $\overset{\lambda}{M^x}|\overset{s\mu}{M}|1$ συστήματος και μέγεθος ομάδων σταθερό $= s$

⑨ Η $E_r | M | 1$ ουρά

* Αναν. διαδ. αφιξ. Erlang $(r, r\lambda)$ ενδ. χρ. αφιξ.
* $Exp(\mu)$ χρ. εξυπ.
* 1 υπηρέτης
* ∞ χωρητικότητα

$Q(t)$ = # πελ.
$R(t)$ = φάση αφικν. πελ.

χ.κ. $S = \{(n,i) : n = 0,1,2\ldots,\ i = 1,2,\ldots r\}$



Η $\overset{\lambda}{E_r} | \overset{\mu}{M} | 1$ ουρά μπορεί να μελετηθεί μέσω της $\overset{r\lambda}{M} | \overset{\mu}{M^c} | 1$ και μεγ. εξυπ. ομάδων r