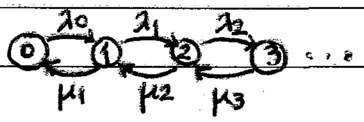
26.10.09 4ο μάθημα

## Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

① Στάσιμη κατανομή 

$\lambda_i$ = ρυθμός άφιξης (δεσμευμένος) όταν υπάρχουν $i$ πελάτες
$\mu_i$ = ρυθμός εξυπηρέτησης (δεσμευμένος) όταν υπάρχουν $i$ πελάτες

$$p_n = \begin{cases} B, & n=0 \\ B\,\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} \begin{array}{l} \nearrow < \infty \ \text{Ευστάθεια} \\ \rightarrow = \infty \ \text{Αστάθεια} \end{array}$$

② Εμφανιζόμενες κατανομές σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων

$p_n$ = στάσιμη πιθανότητα $n$ πελατών στο σύστημα σε τυχαία χρονική στιγμή
$r_n$ = στάσιμη πιθανότητα $n$ πελατών στο σύστημα πριν τη στιγμή άφιξης
$d_n$ = στάσιμη πιθανότητα $n$ πελατών στο σύστημα μετά τη στιγμή αναχώρησης

$Q(t)$ = # πελατών τη στιγμή $t$ σε στασιμότητα
$p_n = P_r[Q(t) = n]$

$$r_n = \lim_{h\to 0^+} P_r[Q(t)=n \mid \text{Άφιξη στο } (t, t+h]]$$

$$d_n = \lim_{h\to 0^+} P_r[Q(t+h)=n \mid \text{Αναχώρηση στο } (t, t+h]]$$

Πρέπει να υπολογίσω: $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{P_r[\text{άφιξη στο } (t,t+h]]}{h} = \lambda^* =$ Μέσος Ρυθμός Αφίξεων $=$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{E[\#\text{ αφίξεων στο } (t, t+h]]}{h}$$

$$\mu^* = \lim_{h\to 0^+} \frac{Pr[\text{αναχωρ. στο } (t,t+h]]}{h} = \begin{matrix}\text{Μέσος}\\ \text{Ρυθμός}\\ \text{Αναχωρήσεων}\end{matrix} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{E[\#\text{ αναχωρ. στο } (t,t+h]]}{h}$$

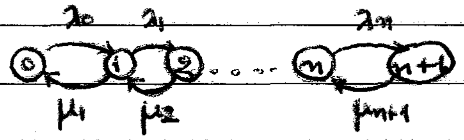
$$\lambda^* = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} Pr[Q(t)=n]\, Pr[\text{άφιξη στο } (t,t+h] \mid Q(t)=n]}{h} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \lambda_n = E[\lambda(Q(t))]$$

Όμοια για $\mu^* = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu_n = E[\mu(Q(t))]$

! προσοχή !

Είναι $\lambda^* = \mu^*$ διότι




$$\lambda_n p_n = \mu_{n+1} p_{n+1}, \quad n \geq 0$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{n+1} p_{n+1} \Rightarrow \lambda^* = \mu^*$$

Έχουμε $r_n = \lim_{h\to 0^+} Pr[Q(t)=n \mid \text{Άφιξη στο } (t,t+h]] =$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{Pr[Q(t)=n, \text{ Άφιξη στο } (t,t+h]]}{Pr[\text{Άφιξη στο } (t,t+h]]} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\underbrace{Pr[Q(t)=n]}_{=p_n}\ \underbrace{Pr[\text{άφιξη στο } (t,t+h] \mid Q(t)=n] / h}_{=\lambda_n}}{\underbrace{Pr[\text{Άφιξη στο } (t,t+h]] / h}_{=\lambda^*}} = \frac{p_n \lambda_n}{\lambda^*}$$

Όμοια $d_n = \frac{p_{n+1}\mu_{n+1}}{\mu^*}$

③ Βασικοί Τύποι

1. $\lambda^* = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \lambda_n$

2. $\mu^* = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu_n$

3. $r_n = \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*}, \quad n \geq 0$

4. $d_n = \frac{p_{n+1}\mu_{n+1}}{\mu^*}, \quad n \geq 0$

④ Ισότητα Μερισμένων Μεταβάσεων κ' Ισότητα PASTA στις Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

Μερισμένες Μεταβάσεις $\Rightarrow \lambda_n p_n = \mu_{n+1} p_{n+1} \Rightarrow r_n = d_n, \quad n \geq 0$

Poisson αφίξεις $\Rightarrow \lambda_n = \lambda, \quad n \geq 0$

$$r_n = \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*} = \frac{\lambda p_n}{\sum_{k=0}^{\infty} \lambda p_k} = \frac{\cancel{\lambda}\, p_n}{\cancel{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} p_k} = p_n$$

⑤ Η M/M/1 ουρά με αποθαρρυνόμενους πελάτες (balking) με εξυπηρετήσεις

Poisson λ διαδικασία αφίξεων

Εκθετικούς μ χρόνους εξυπηρέτησης

1 υπηρέτης

∞ χωρητικότητα

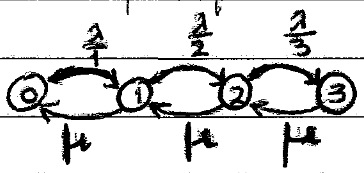
$q_n$ = πιθανότητα εγκατάλειψης πελάτη που βρίσκει $n$ πελάτες κατά την άφιξή του.

$Q(t) = \#$ πελατών

$\lambda_n = \lambda(1-q_n)$, $n \geq 0$

$\mu_n = \mu$, $n \geq 1$

Θα θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση $q_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 0$




άρα $\lambda_n = \lambda\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{\lambda}{n+1}$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho} < \infty$$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ — Ευστάθεια Πάντα

$$p_n = \begin{cases} B, & n=0 \\ B\,\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}, & n \geq 1 \end{cases} = \left\{\begin{matrix} e^{-\rho}, & n=0 \\ e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}, & n\geq 1 \end{matrix}\right\} = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}, \quad n \geq 0$$

$Q \sim \text{Poisson}(\rho)$

$E[Q] = \rho$

Μέσος Ρυθμός Πραγματικών Αφίξεων $= \lambda^*_{\text{πραγματικό}} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda}{n+1} e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!} =$

$$= \frac{\lambda e^{-\rho}}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\lambda e^{-\rho}}{\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} =$$

$$= \frac{\lambda e^{-\rho}}{\rho}(e^{\rho}-1) = \mu(1-e^{-\rho})$$

Εναλλακτικά:

$$\lambda^*_{\pi\rho.} = \mu^*_{\pi\rho.} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n p_n = \mu \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \mu(1-p_0) = \mu(1-e^{-\rho})$$

$\lambda_{o\lambda} = \mu_{o\lambda} = \lambda$

$r_n^{o\lambda} \underset{\uparrow \text{ PASTA}}{=} p_n = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}, \quad n \geq 0$

$= d_n^{o\lambda}$
↑
Ιδιότητα
Μεμονωμένων
Μεταβάσεων

$$r_n^{\pi\rho.} = \frac{\lambda^*_{n,\pi\rho} p_n}{\lambda^*_{\pi\rho}} = \frac{\frac{\lambda}{n+1} e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}}{\mu(1-e^{-\rho})} = \frac{e^{-\rho} \rho^{n+1}}{(1-e^{-\rho})(n+1)!}, \quad n \geq 0$$

$\parallel$

$d_n^{\pi\rho.}$

$E[Q] = \lambda\, E[S]$ ⇝ όλοι οι πελάτες

Εισερχόμενοι πραγματικοί πελάτες!

$E[Q] = \rho = \lambda^{o\lambda = \lambda} \cdot E[S^{o\lambda}]$

$\Rightarrow E[S^{o\lambda}] = \frac{1}{\mu}$

$\rho = \lambda^{*\pi\rho} E[S^{\pi\rho.}]$

$$\Rightarrow E[S^{\pi\rho}] = \frac{\rho}{\lambda^*_{\pi\rho}} = \frac{\rho}{\mu(1-e^{-\rho})} = \frac{\lambda}{\mu^2(1-e^{-\rho})}$$

Πιθανότητα να εξυπηρετηθεί ένας πελάτης

$\parallel$ ← 2ος τρόπος $\quad \parallel$ ← 1ος τρόπος υπολογισμού

Μακροπρόθεσμο ποσοστό εξυπ. πελατών

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n^{o\lambda} (1-q_n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!} \frac{1}{n+1} =$$

$$= \frac{e^{-\rho}}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{e^{-\rho}}{\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} =$$

$$= \frac{e^{-\rho}}{\rho} (e^{\rho} - 1) = \frac{1-e^{-\rho}}{\rho}$$

$\parallel$

$\frac{\lambda^*_{\pi\rho\alpha\gamma.}}{\lambda_{o\lambda}}$

$\parallel$

$$\frac{\mu(1-e^{-\rho})}{\lambda} = \frac{1-e^{-\rho}}{\rho}$$

Υπολογισμός ρυθμού κέρδους ανά χρονική μονάδα.
Για το σύστημα:

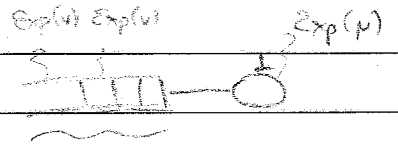
R: κέρδος από κάθε πελάτη που εξυπηρετείται

C: κόστος λειτουργίας για το σύστημα για κάθε πελάτη ανά χρον. μονάδα

Μακροπρόθεσμο
Ρυθμό Κέρδος $= \lambda^*_{\pi\rho.} \cdot R - E[Q] \cdot C = \lambda^*_{\pi\rho.}(R - C \cdot E[S_{\pi\rho.}]) =$
Ανά Χρον. Μονάδα
$= \mu(1-e^{-\rho})R - C\rho$

(e) Σύστημα με ανυπόμονους πελάτες (reneging) με αναχωρήσεις M/M/1.

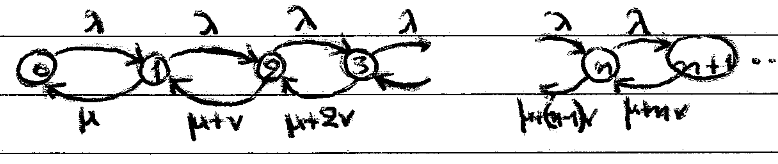
Poisson $\lambda$ αφίξεις
Εκθετικός $\mu$ χρόνος εξυπηρέτησης
1 υπηρέτης
$\infty$ χωρητικότητα
Κάθε αφικνούμενος πελάτης έχει είτε $Exp(\nu)$ χρόνο υπομονής μέχρι να αρχίσει η εξυπηρέτησή του



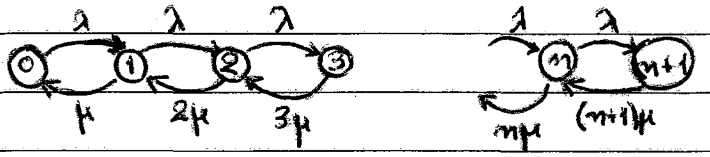

$Q(t) = \#$ πελατών

| Κατάσταση | Επομ. Κατάσταση | Χρόνος |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $Exp(\lambda)$ |
| $n \geq 1$ | $n+1$ | $Exp(\lambda)$ |
| | $n-1$ | $Exp(\mu+(n-1)\nu)$ |

$X_1, X_2 \ldots X_k$ ανεξ $\sim Exp(\alpha_1) \ldots Exp(\alpha_k)$ $\Rightarrow \min(X_1, \ldots, X_k) \sim Exp(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)$



Θα μελετήσουμε μια ειδική περίπτωση $\mu = \nu$




$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho} < \infty$$ Ευστάθεια πάντα

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$p_n = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}, \quad n \geq 0$$

$$r_n = p_n = d_n$$

PASTA

Ιδιοτ. Μεμ. Μετ.

$\mu^* = \lambda$ = συνολικός ρυθμός αναχώρησης

$\mu^*_{np}$ = Ρυθμός αναχωρήσεων λόγω εξυπηρέτησης

$$\mu^*_{np} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu = \mu(1 - p_0) = \mu(1 - e^{-\rho})$$

Ποσοστό πελατών που εξυπηρετούνται $= \dfrac{\mu^*_{np}}{\mu^*} = \dfrac{\mu(1-e^{-\rho})}{\lambda} = \dfrac{1-e^{-\rho}}{\rho}$

$$E[S_{\sigma\lambda}] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

Υπολογισμός ρυθμού κέρδους ανά χρονική μονάδα όταν υπάρχει δομή κέρδους-κόστους

R: Εισιτήριο εισόδου ανά εισερχόμενο πελάτη (κέρδος)

C: λειτουργικό κόστος ανά πελάτη, ανά χρονική μονάδα (κόστος)

$C_{αποζημ}$ = αποζημίωση που δίνει το σύστημα σε κάθε πελάτη που φεύγει λόγω ανυπομονησίας (κόστος)

Μακροπρόθεσμο καθαρό κέρδος ανά χρον. μονάδα $= \lambda \cdot R - E[Q]C - \mu^{*}_{\substack{αναχ. \\ λόγω \\ ανυπομονησίας}} \cdot C_{αποζημ} =$

$$\mu^{*}_{αναχ.\,λόγω\,ανυπομονησίας} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n (n-1)\mu = \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} n p_n - \sum_{n=1}^{\infty} p_n\right) =$$

$$= \mu(E[Q] - 1 + p_0)$$

$$= \lambda \cdot R - C \cdot p - C_{αποζ.} \cdot \mu (E[Q] - 1 + p_0) =$$

$$= \lambda R - Cp - C_{αποζ}\, \mu (p - 1 + e^{-p})$$

02.11.09 5° μάθημα

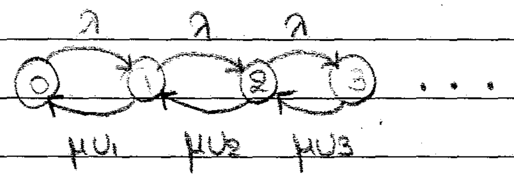
① M/M/1 με ταχύτητα εξυπηρέτησης
- Poisson ($\lambda$) διαδικασία αφίξεων
- Exp ($\mu$) χρ. εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης
- $\infty$ χωρητικότητα
- n πελάτες στο σύστημα
  ↳ ταχύτητα υπηρ. $u_n$

$X \sim Exp(\theta) \Rightarrow \frac{X}{a} \sim Exp(a\theta)$

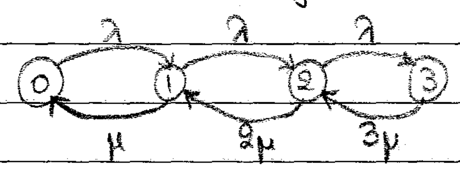
$X \sim Exp(\theta) \Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\theta x}, \; x > 0$

$$F_{\frac{X}{a}}(x) = P_r\left[\frac{X}{a} \le x\right] = P_r[X \le ax] = 1 - e^{-\theta a x}$$

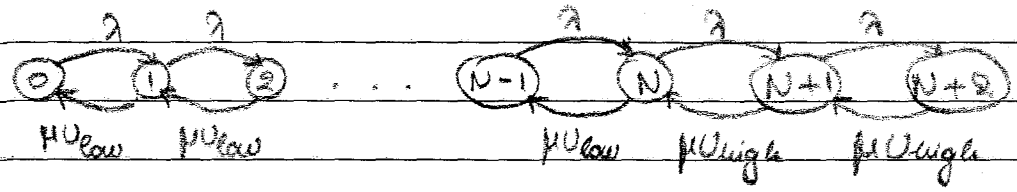
Άρα αν ο χρόνος εξυπηρέτησης $\sim Exp(\mu)$ και η ταχύτητα εξυπηρέτησης $\sim u_n$ } $\Rightarrow$ Χρόνος εξυπ. όταν ο υπηρ. δουλεύει με $u_n$ $\sim Exp(u_n \mu)$




Ειδική περίπτωση:
Ταχύτητα ανάλογη του αριθμού των πελατών: $u_n = n$ για $n \ge 1$.




Ειδική περίπτωση:
Χαμηλή ταχύτητα αν το #πελ $\le N$ : $u_n = u_{low}$ για $n \le N$
Υψηλή ταχύτητα αν το #πελ $> N$ : $u_n = u_{high}$ για $n > N$



② M/M/c ουρά

- Poisson (λ) διαστ. αφίξεων
- Exp(μ) χρ. εξυπηρέτησης
- c παράλληλοι υπηρέτες
- ∞ χωρητικότητα

Poisson λ ① ~ Exp(μ)

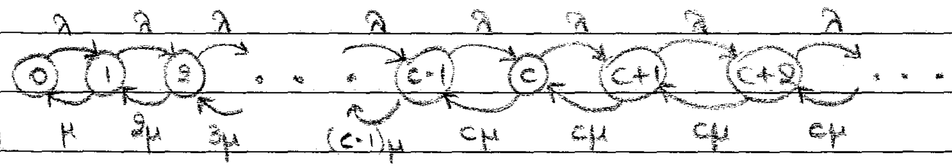
→ |||||| ② ~ Exp(μ)   $Q(t) = \#$ πελ.

ⓒ ~ Exp(μ)   στο σύστημα

| Κατάσταση | Επόμ. κατάσταση | Χρόνος |
|---|---|---|
| 0 | 1 | Exp(λ) |
| $1 \le n$ | $n+1$ | Exp(λ) |
| | $n-1$ | Exp(nμ) ← min από τους n Exp(μ) |
| $n \ge c$ | $n+1$ | Exp(λ)   χρόνους εξυπηρέτησης που |
| | $n-1$ | Exp(cμ)   βρίσκονται σε εξέλιξη |

⇓

Q(t) μαρκ



Μοιάζει μ' αυτό το μοντέλο με μεταβλ. ταχύτητα $\quad v_n = \begin{cases} n, & n < c \\ c, & n \ge c \end{cases}$

$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} p_0 = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} p_0, & n \le c \\[2ex] \dfrac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\,\mu^n} p_0, & n \ge c+1 \end{cases} \underset{\rho = \frac{\lambda}{\mu}}{=} \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} p_0, & 0 \le n \le n \\[2ex] \dfrac{\rho^n}{c!\,c^{n-c}} p_0, & n \ge c+1 \end{cases}$$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c+1}^{\infty} \frac{\rho^n}{c!\, c^{n-c}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c+1}^{\infty} \frac{\rho^{\overbrace{n-c}^{=j}}}{c^{n-c}} = \sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^j =$$

$$= \sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\frac{\rho}{c}}{1-\frac{\rho}{c}} \frac{\rho^c}{c!}$$

$\rho < c$ $\Downarrow$ $\frac{\rho}{c} < 1$.

$$B^{-1} = \begin{cases} \infty, & \rho \geq c \quad \text{αστάθεια} \\ \sum_{n=0}^{c} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \cdot \frac{\rho}{c-\rho}, & \rho < c \quad \text{ευστάθεια} \end{cases}$$

$$p_0 = B$$

$Q_q$ = #πελ. στην ουρά

$$E[Q_q] = \sum_{n=\cancel{0}\,1}^{\infty} n \Pr[Q_q = n] = \sum_{n=\cancel{0}\,1}^{\infty} n\, p_{n+c} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\rho^{n+c}}{c!\, c^{n+c-c}} B = *$$

$$\Pr[Q_q = n] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{c} p_k, & n = 0 \\ p_{n+c}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$* = B \frac{\rho^c}{c!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\rho}{c}\right)^n = B \frac{\rho^c}{c!} \frac{\frac{\rho}{c}}{\left(1-\frac{\rho}{c}\right)^2} = B \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$d/dx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \overset{\cdot x}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

W: χρόνος αναμονής
Θ. Little:

$$E[Q_q] = \lambda E[W]$$

$$\Downarrow$$

$$E[W] = \frac{B}{\lambda} \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} = \frac{B}{\mu} \frac{\rho^{c}}{(c-1)!(c-\rho)^2}$$

$$E[S] = E[W] + \frac{1}{\mu} = \left(B \frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)^2} + 1\right) \frac{1}{\mu}$$

Q = # πελ. στο σύστημα

$$E[Q] = \lambda \cdot E[S] = \rho \left( B \frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)^2} + 1 \right)$$

Ποσοστό των πελατών που αρχίζουν αμέσως να εξυπηρετούνται $= \sum_{n=0}^{c-1} r_n \overset{\text{PASTA}}{=} \sum_{n=0}^{c-1} p_n = \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} B$

③ Υπενθυμίσεις M/M/1

$$E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \qquad \rho = \frac{1}{\mu}$$

$$E[W] = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

④ Ένας γρήγορος ή Δύο αργοί υπηρέτες;

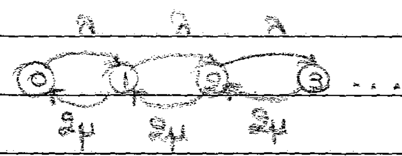
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Poisson λ διαδ. αφίξεων πελατών
- Χρόνοι εξυπηρέτησης Exp (μ)

Τι είναι καλύτερο; 2 υπηρέτες με ταχύτητα 1. ②
ή 1 υπηρέτης με ταχύτητα 2. ①

$E[S_1]$ ~ χρόνος παραμονής για 1 πελάτη με 1 γρήγορο εξυπηρετητή
$E[S_2]$ ~ χρόνος παραμονής για 1 πελάτη με 2 αργούς εξυπηρετητές

Σύστημα ①

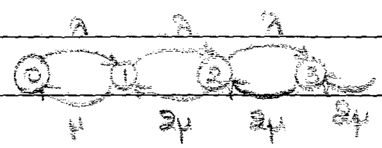



$\lambda \quad 2\mu$

M/M/1

$$E[S_1] = \frac{1}{2\mu\left(1-\frac{\lambda}{2\mu}\right)} = \frac{1}{2\mu\left(1-\frac{\rho}{2}\right)} = \frac{1}{\mu(2-\rho)}$$

Σύστημα ②




$\lambda \quad \mu$

M/M/2

$$E[S_2] = B\left(\frac{\rho^2}{(2-1)!(2-\rho)^2} + 1\right)\frac{1}{\mu}, \quad \text{με } B = \frac{2-\rho}{2+\rho} \text{ (μετά από πράξεις)}$$

$$= \frac{4}{\mu(4-\rho^2)}$$

$$E[S_1] \;\square\; E[S_2] \overset{\rho<2}{\underset{\text{λόγω ευστάθειας}}{\Leftrightarrow}} \frac{1}{\mu(2-\rho)} \;\square\; \frac{4}{\mu(4-\rho^2)} \Leftrightarrow 1 \;\square\; \frac{4}{2+\rho} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+\rho \;\square\; 4 \Leftrightarrow \rho \triangleleft 2 \Rightarrow E[S_1] < E[S_2]$$

Να συγκρίνω τα $E[W_1]$, $E[W_2]$

$$E[W_1] \;\square\; E[W_2]$$
$$\Leftrightarrow \frac{\rho}{2\mu(2-\rho)} \;\square\; \frac{\rho^2}{\mu(4-\rho^2)}$$

Σύστημα ①  Σύστημα ②

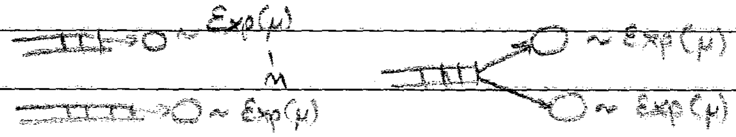
$$\overset{\rho<2}{\Leftrightarrow} 1 \;\square\; \frac{2\rho(2-\rho)}{4-\rho^2} \Leftrightarrow 2+\rho \;\square\; 2\rho$$

$E[W_1] = \frac{\rho}{2\mu(2-\rho)}$  $E[W_2] = \frac{\rho^2}{\mu(4-\rho^2)}$

$$\Leftrightarrow 2 \triangleright \rho$$

Τελικά $E[W_1] > E[W_2]$

⑤ 1 ουρά ή πολλές ουρές (Pooling)




$E[S_1]$ ή $E[S_2]$

Αν υποθέσουμε ότι στο σύστημα με τις δύο ουρές οι πελάτες πάνε στην
1 με πιθανότητα $\frac{1}{2}$
ή 2 με πιθανότητα $\frac{1}{2}$
(τυχαία επιλογή)

Τότε είναι σαν να έχουμε 2 M/M/1 με ρυθμό αφίξεων $\frac{\lambda}{2}$ και ρυθμό εξυπηρέτησης $\mu$.

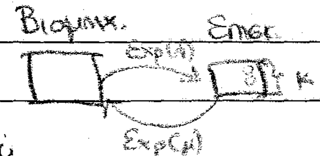
Ενώ το σύστημα με την 1 ουρά είναι M/M/2 με ρυθμό άφιξης $\lambda$ και ρυθμό εξυπηρέτησης $\mu$.

Και η σύγκριση γίνεται όπως στο προηγούμενο παράδειγμα: (υπολογίζω τα $E[S_1]$, $E[S_2]$, $E[W_1]$, $E[W_2]$ και τα συγκρίνω)

⑥ Συστήματα με πεπερασμένο αριθμό δυνητικών πελατών

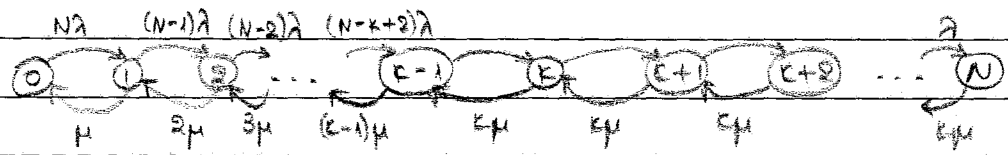
N δυνητικοί πελάτες
π.χ.
N μηχανές
Exp(λ): χρόνος λειτουργίας κάθε μηχανής
Σύστημα εξυπ. = χώρος επισκευών με c υπηρέτες
Exp(μ) χρόνος επισκευής

$Q(t)$ = # μηχανών στο χώρο επισκευής



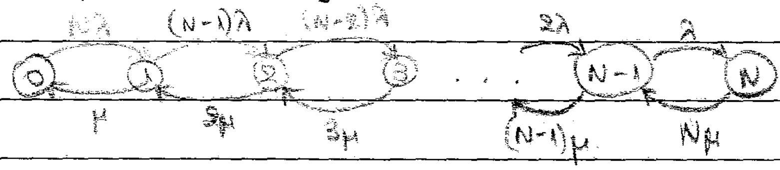

| Κατάσταση | Επόμ. Κατάσταση | Χρόνος |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $Exp(N\lambda)$ |
| 1 | 2 | $Exp((N-1)\lambda)$ |
| | 0 | $Exp(\mu)$ |
| 2 | 3 | $Exp((N-2)\lambda)$ |
| | 1 | $Exp(2\mu)$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

για όλες οι μηχανές λειτουργούν ~ $Exp(\lambda)$ η 1η χαλάει στο min




Λύση για ειδική περίπτωση $c = N$

1 επισκευαστής για κάθε μηχανή




$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} p_0 = \frac{N\lambda (N-1)\lambda \cdot (N-n+1)\lambda}{\mu\, 2\mu\, 3\mu \dots n\mu} p_0 = \underbrace{\frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!}}_{\binom{N}{n}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 =$$

$$\overset{p=\frac{\lambda}{\mu}}{\Rightarrow} p_n = \binom{N}{n} p^n p_0$$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = 1 + \sum_{n=1}^{N} \binom{N}{n} p^n = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n = (1+p)^N$$

Πεπερασμένος χώρος καταστάσεων $\Rightarrow$ Πάντα Ευστάθεια

$$p_n = \binom{N}{n} \frac{p^n}{(1+p)^N} = \binom{N}{n} \left(\frac{p}{1+p}\right)^n \left(\frac{1}{1+p}\right)^{N-n}$$

$$\Rightarrow Q \sim Bin\left(N, \frac{p}{1+p}\right)$$

$E[\text{Χρόνος για 1 κύκλο της μηχανής}] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$

Πιθ. μια μηχανή να λειτουργεί = ποσοστό χρόνου που λειτουργεί μια μηχανή $= \dfrac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} = \dfrac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{\mu+\lambda}{\lambda\mu}} =$

$= \frac{\mu}{\mu+\lambda} = \frac{1}{1+\rho}$

Πιθ. η μηχ. είναι στο επισκευαστήριο $= \frac{\rho}{1+\rho}$

Επομένως η πιθ. η μηχανές στο επισκευαστήριο = πιθ. η επιτυχιών σε N δοκιμές Bernoulli (είναι στο επισκ. ≡ επιτυχίες) $= \binom{N}{n}\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{n}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{N-n}$ που συμφωνεί με το $p_n$