28.09.09 1ο μάθημα

1) Queuing Systems
Erlang 1909

αφίξεις → $\boxed{\text{σύστημα εξυπηρέτησης}}$ → αναχωρήσεις →

Ουρά = Σύστημα Εξυπηρέτησης = Σύστημα εισόδου-εξόδου + τυχαιότητα + διακριτές μονάδες

2) Βασικά Χαρακτηριστικά

1. Διαδικασία αφίξεων (σταθεροί χρόνοι μεταξύ των αφίξεων / ντετερμινιστική διαδικασία αφίξεων
ανεξάρτητους ισόνομους εκθετικούς exp(e) χρόνους / Poisson διαδικασία αφίξεων
ανεξάρτητους και ισόνομους χρόνους μεταξύ των αφίξεων
με γενική κατανομή A(x)) ανανεωτική διαδικασία

2. Χρόνοι Εξυπηρετήσεων
3. Πλήθος παράλληλων υπηρετών
4. Χωρητικότητα συστήματος
5. Πειθαρχία ουράς

3) Ονοματολογία Kendall

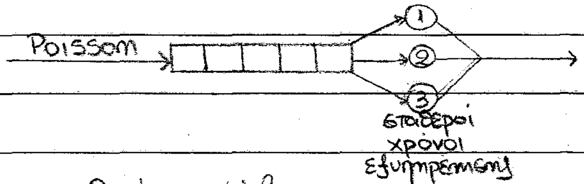
A / B / c / K ( )

A: διαδικασία αφίξεων
B: χρόνοι εξυπηρέτησης
c: πλήθος υπηρετών
K: χωρητικότητα
( ): πειθαρχία ουράς

D M GI → ανεξ. ισονομ.
deterministic
Poisson memoryless

First Come First Served FCFS
Last Come First Served LCFS
Service In Random Order SIRO

π.χ. M / D / 3 / 8 (LCFS)
Poisson διαδικασία αφίξεων
Deterministic (σταθεροί) χρόνοι εξυπηρέτησης
3 υπηρέτες
8 χωρητικότητα



4) Βασικές Παράμετροι

a = Μέσος Χρόνος μεταξύ των αφίξεων $\lambda = \frac{1}{a}$: ρυθμός αφίξεων
b = Μέσος Χρόνος Εξυπηρέτησης $\mu = \frac{1}{b}$: ρυθμός εξυπηρέτησης

Εμφυτευμένες διαδικασίες

$t_1 < t_2 < \dots$ στιγμές αφίξεων

$r_1 < r_2 < \dots$ στιγμές αναχωρήσεων

$Q_n^- = Q(t_n^-) =$ # πελατών που βλέπει μπαίνοντας ο n-οστός πελάτης

$Q_n^+ = Q(r_n^+) =$ # πελατών που αφήνει πίσω φεύγοντας ο n-οστός πελάτης

Ορίζω $r_n = \lim_{k\to\infty} \Pr[Q_k^- = n] = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{r=1}^{k} 1\{Q_r^- = n\}}{k} =$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{\#\text{πελατών μεταξύ των πρώτων } k \text{ που βλέπουν } n \text{ πελάτες μπαίνοντας}}{k} =$

= μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών που βλέπουν n πελάτες μετά την άφιξη

π.χ. $r_2 = 0{,}3$
Στους 100 πελάτες
οι 30 πελάτες θα
βλέπουν 2

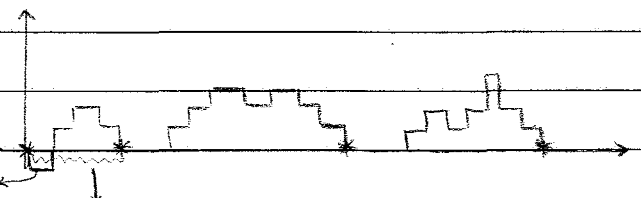
$d_n = \lim_{k\to\infty} \Pr[Q_k^+ = n]$

π.χ. $F_S(2) = 0{,}5$
Στους 100 πελάτες
οι 50 πελάτες θα
μείνουν πάνω από
2 ώρες

S_n = χρόνος παραμονής n-οστού πελάτη → W_n χρόνος αναμονής
→ X_n χρόνος εξυπηρέτησης

		αντίστοιχα
$F_S(x) = \lim_{n\to\infty} \Pr[S_n \le x]$	= μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών	$E(S)$
$F_W(x)$	με χρόνο παραμονής $\le x$	$E(W)$
$F_X(x)$		$E(X)$

3. Υπηρέτης



περίοδος αργίας I_1

περίοδος συνεχούς λειτουργίας Y_1

κύκλος λειτουργίας ή απασχόλησης

	αντίστοιχα
$F_I(x) = \lim_{n\to\infty} \Pr[I_n \le x]$	$E(I)$
$F_Y(x)$	$E(Y)$
$F_Z(x)$	$E(Z)$

⑤ Μέτρα Απόδοσης Συστήματος

1. Διαχείριση
2. Πελάτες
3. Υπηρέτες

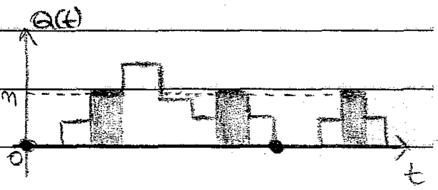
1. Διαχείριση

$Q(t)$: πλήθος πελατών στο σύστημα $\to$ $Q_q(t)$: # στην queue, $Q_s(t)$: # στο service $\quad T_n \; \{Q(t), t \geq T_n\}$

$\{Q(t), t \geq 0\}$

$$p_n = \lim_{t\to\infty} \Pr[Q(t)=n] \rightsquigarrow P_n + \Sigma \quad e^{-at}$$

$$p_n = \lim_{t\to\infty} \Pr[Q(t)=n] = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1\{Q(u)=n\}du}{t} =$$



$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\text{χρόνος στην κατάσταση } n \text{ στο } [0,t]}{t} =$$

= μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου στην κατάσταση n

χωρητικότητα 2: $p_0 = 0{,}5$, $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}2$

$Q \sim (p_n : n = 0, 1, 2 \ldots)$

$$E(Q) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)du}{t} = \text{μακροπρόθεσμος μέσος αριθμός πελατών}$$

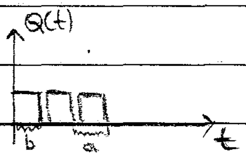
2. Πελάτες

παράδειγμα D/D/1

1ο σενάριο

$a = 10$ λεπτά

$b = 9$ λεπτά



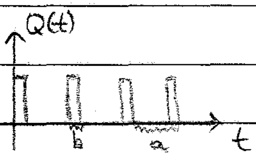
$p_0 = 0{,}1 \quad r_0 = 1$

$p_1 = 0{,}9 \quad r_1 = 0$

2ο σενάριο

$a = 10$ λεπτά

$b = 1$ λεπτό



$p_0 = 0{,}9 \quad r_0 = 1$

$p_1 = 0{,}1 \quad r_1 = 0$

⑥ Βασικά Αποτελέσματα

1. Ευστάθεια
2. Θεώρημα Little
3. Ιδιότητα Μεμονωμένων Μεταβάσεων
4. Ιδιότητα PASTA

1. Ευστάθεια

$\rho = \lambda \cdot b$ = ρυθμός έντασης κυκλοφορίας

λ: ρυθμός αφίξεων, b: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

$\rho < c$

c: πλήθος υπηρετών

π.χ. δεν ισχύει για D/D/1

όταν δε γράφω τη χωρητικότητα εννοείται η άπειρη και όταν δε γράφω την πειθαρχία, εννοείται η FIFO

Θεώρημα: Έστω σύστημα εξυπηρέτησης GI/G/c όπου η κατανομή των χρόνων μεταξύ των αφίξεων $A(x)$ και/ή η κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης $B(x)$ είναι συνεχείς. Τότε αν

1. $\rho < c$, $\exists (p_n), (r_n), (d_n)$ με $p_n, r_n, d_n > 0$ $\forall n$ ευστάθεια
2. $\rho \geq c$, $p_n = r_n = d_n = 0$ $\forall n$ $(Q = \infty)$ αστάθεια

2. Little

Θεώρημα $E(Q) = \lambda \cdot E(S)$

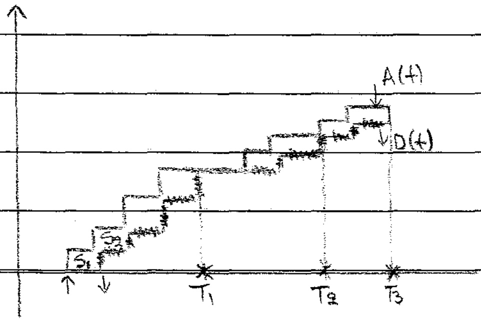
$E(Q)$: μέσος αριθμός πελατών, λ: ρυθμός αφίξεων, $E(S)$: μέσος χρόνος παραμονής

π.χ. $\lambda = 20$ πελ/10 λεπτά

$E(Q) = 30$ πελ.

$E(S) = ;$ 15 λεπτά

Ιδέα Μαθηματικής Απόδειξης



Έστω T_n οι στιγμή που τελειώνει ο n-οστός κύκλος απασχόλησης

$$E(Q) = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)\,du}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^{T_n} Q(u)\,du}{T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{A(T_n)} S_i}{T_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{A(T_n)}{T_n} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{A(T_n)} S_i}{A(T_n)}$$

$$\lambda \cdot E(S)$$

$A(t)$ = #αφίξεων στο $[0,t]$

$D(t)$ = #αναχωρήσεων στο $[0,t]$

⑦ Σχέση p_n, d_n, r_n

p_n = πιθανότητα n πελάτες στο σύστημα σε τυχαία χρονική στιγμή

r_n = πιθανότητα n πελάτες στο σύστημα σε τυχαία στιγμή άφιξης

d_n = πιθανότητα n πελάτες στο σύστημα σε τυχαία στιγμή αναχώρησης

Συνθήκες ώστε κάποιες να είναι ίσες:

3. Ιδιότητα Μεμονωμένων Μεταβάσεων

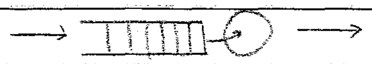
Θεώρημα: Σε συστήματα εξυπηρέτησης με μεμονωμένες μεταβάσεις ισχύει $r_n = d_n$

4. Ιδιότητα PASTA (= Poisson Arrivals See Time Averages)

Θεώρημα: Σε συστήματα εξυπηρέτησης με Poisson διαδικασία αφίξεων ισχύει $r_n = p_n$

12.10.09 2° μάθημα

1) Υπενθυμίσεις



$Q(t)$ = # πελατών τη στιγμή t στο σύστημα
$Q_q(t)$ = # πελατών τη στιγμή t σε αναμονή
$Q_s(t)$ = # πελατών τη στιγμή t σε εξυπηρέτηση

t_n = στιγμή άφιξης πελάτη n
τ_n = στιγμή αναχώρησης πελάτη n
S_n = χρόνος παραμονής πελάτη n
W_n = χρόνος αναμονής πελάτη n
X_n = χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη n

$$p_n = \lim_{t\to\infty} Pr[Q(t)=n]$$

$$r_n = \lim_{i\to\infty} Pr[Q(t_i)=n]$$

$$d_n = \lim_{i\to\infty} Pr[Q(\tau_i^+)=n]$$

2) Βασικά Αποτελέσματα

1. Ευστάθεια: GI / G / C

Ευστάθεια $\Leftrightarrow$ $\rho < c$

$$\rho = \underbrace{\lambda}_{\text{ρυθμός αφίξεων}} \cdot \underbrace{b}_{\text{μέσος χρόνος εξυπηρέτησης}}$$

2. Θεώρημα Little:

$$E[Q] = \lambda \cdot E[S]$$

3. Ιδιότητα Μεμονωμένων Αφίξεων - Αναχωρήσεων:

Μεμονωμένες Αφίξεις και Αναχωρήσεις $\Rightarrow$ $r_n = d_n$ για $n=0,1,2,\dots$

Αιτιολόγηση:

$$r_n = \lim_{t\to\infty} \frac{A_n(t)}{A(t)}$$

$$d_n = \lim_{t\to\infty} \frac{D_n(t)}{D(t)}$$

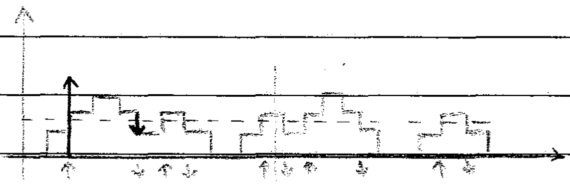
$A(t)$ = # αφίξεων στο $[0,t]$
$A_n(t)$ = # αφίξεων στο $[0,t]$ που βλέπουν n πελάτες

$D(t)$ = # αναχωρήσεων στο $[0,t]$
$D_n(t)$ = # αναχωρήσεων στο $[0,t]$ που αφήνουν n πελάτες

$$r_n = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{A_n(t)}{t}}{\underbrace{\frac{A(t)}{t}}_{\text{ρυθμός αφίξεων}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{D_n(t)}{t}}{\underbrace{\frac{D(t)}{t}}_{\text{ρυθμός αναχωρήσεων}}} = d_n$$

ρυθμός αφίξεων = ρυθμός αναχωρήσεων

διότι $|A_n(t) - D_n(t)| \leq 1$ λόγω των μεμονωμένων αφίξεων-αναχωρήσ.



4. Ιδιότητα PASTA (= Poisson Arrivals See Time Arrivals)

Διαδικασία αφίξεων Poisson $\Rightarrow$ $r_n = p_n$, $n=0,1,2,\dots$

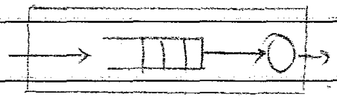
Αιτιολόγηση:

$$r_n = \lim_{h\to 0^+} Pr[Q(t)=n \mid \overbrace{A(t,t+h)}^{\text{ενδεχόμενο άφιξης στο } [t,t+h]}] =$$

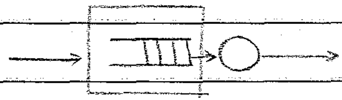
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{Pr[Q(t)=n,\ A(t,t+h)]}{Pr[A(t,t+h)]} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\Pr[Q(t)=n]\ \overbrace{\Pr[A(t,t+h) \mid Q(t)=n]/h}^{=\lambda}}{\underbrace{\Pr[A(t,t+h)]/h}_{=\lambda}} = p_n$$

③ Εφαρμογές Θεωρήματος Little.

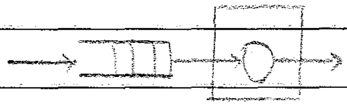


1. Εφαρμογή στο χώρο αναμονής



$$E[Q_q] = \lambda E[W]$$

2. Εφαρμογή στο χώρο εξυπηρέτησης



$$E[Q_s] = \lambda E[X]^{=b}$$

Μέσο πλήθος πελατών σε εξυπηρέτηση = ρ

||

Μέσο πλήθος απασχολημένων υπηρετών = $\underset{c}{\text{πλήθος υπηρετών}}$ × ποσοστό απασχόλησης κάθε υπηρέτη

ποσοστό απασχολημένων υπηρετών σε GI/G/C = $\frac{\rho}{c}$

παράδειγμα

GI/G/C

ρυθμός αφ. πελ: 6 πελ/λεπτό

24 υπηρέτες

Μέσος χρόνος εξυπηρ. πελάτη: 2 λεπτά

Ποσοστό απασχόλησης υπηρέτη: ;

$\rho = \lambda \cdot b = 6 \cdot 2 = 12$ άρα ποσοστό απασχόλησης υπηρέτη $= \frac{\rho}{c} = \frac{12}{24} = 50\%$

④ Πιθανότητα κενού συστήματος στο GI / G / ① ουρά

$p_0 = 1-\rho$

Απόδειξη : $E[Q_s] = \lambda \cdot b$ Θ. Little

$\Rightarrow 0 \cdot Pr[Q_s = 0] + 1 \cdot Pr[Q_s = 1] = \rho$

$\Rightarrow Pr[Q \neq 0] = \rho \Rightarrow 1 - Pr[Q=0] = \rho$

$\Rightarrow \underbrace{Pr[Q=0]}_{p_0} = 1-\rho$

Ισχύει μόνο αν
1. έχω 1 υπηρέτη μόνο
2. έχω ∞ χωρητικότητα
3. δεν έχω αποχωρήσεις πελατών πριν εξυπηρετηθούν

⑤ Η M / M / 1 / 1 ουρά
- Poisson (λ) διαδικασία αφίξεων
- Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης
- χωρητικότητα 1.

$\rho = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}$

$E[Q] = ;$

$E[S] = ;$

$p_0 = ;$

Από Θ. Little $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

Δεσμεύοντας στο τι βλέπει ένας αφικνούμενος πελάτης

$E[S] = r_0 \cdot \frac{1}{\mu} + r_1 \cdot 0 = \frac{r_0}{\mu} \overset{\text{PASTA}}{=} \frac{p_0}{\mu}$

Τέλος $E[Q] = \sum_{n=0}^{1} n p_n = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1$

Όμως $p_0 + p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = 1 - p_0$

Άρα έχω $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

$E[S] = p_0 \cdot \frac{1}{\mu}$

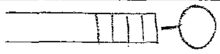
$p_1 = 1 - p_0$

$$\Rightarrow 1 - p_0 = \overbrace{\frac{\lambda}{\mu}}^{=\rho} p_0$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{1+\rho}$$

$$E[S] = \frac{1}{\mu(1+\rho)}$$

$$E[Q] = \frac{\rho}{1+\rho}$$

⑥ Η M/M/1 ουρά 

- Poisson (λ) διαδικασία αφίξεων
- Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης
- ∞ χωρητικότητα

$\rho = \lambda \cdot \frac{1}{\mu}$

$E[Q] = ;$

$E[S] = ;$

$p_0 = ;$

$0 \to \frac{1}{\mu}$

$1 \to \frac{2}{\mu}$

$2 \to \frac{3}{\mu}$

$\vdots$

$n \to \frac{n+1}{\mu}$

$p_0 = 1 - \rho$ (ειδική περ. G1/G/1)

Θ. Little $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

Δεσμεύουμε στον αριθμό πελατών που βρίσκει ένας πελάτης

$$E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\Pr[\text{βρίσκει } n \text{ πελάτες}]}_{r_n \overset{\text{PASTA}}{=} p_n} \underbrace{E[S \mid \text{βρίσκει } n \text{ πελάτες}]}_{=(n+1)\cdot\frac{1}{\mu}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_n (n+1) \frac{1}{\mu} =$$

$$= \frac{1}{\mu}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n p_n + \sum_{n=0}^{\infty} p_n\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu}(E[Q] + 1)$$

$$\Rightarrow E[S] = \frac{1}{\mu}(\lambda E[S] + 1) \Rightarrow (1-\rho) E[S] = \frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \quad \text{και} \quad E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Ώρες Γραφείου 330: Τρίτη-Πέμπτη $13^{00} - 15^{00}$

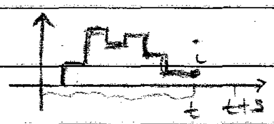
Φυλλάδιο 1 Ασκήσεων E-Class

7) Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου (ΜΑΣΧ)

Ορισμός: $\{X(t): t \geq 0\}$ λέγεται ΜΑΣΧ
αν

1. ο χώρος καταστάσεων S της $\{X(t)\}$ είναι αριθμήσιμος
2. $Pr[\underbrace{X(t+s)=j}_{\text{μέλλον}} \mid \underbrace{X(u): 0 \leq u < t}_{\text{παρελθόν}}, \underbrace{X(t)=i}_{\text{παρόν}}]$, $s>0$

$$= Pr[X(t+s)=j \mid X(t)=i]$$



Για οποιεσδήποτε καταστάσεις $i, j \in S$, $i \neq j$

$$q_{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{Pr[X(t+h)=j \mid X(t)=i]}{h}$$ ρυθμός μετάβασης $i \to j$

$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$: ρυθμός εξόδου από την i

Κριτήριο ΜΑΣΧ

Μια $\{X(t): t \geq 0\}$ στοχ. διαδικασία είναι ΜΑΣΧ αν

1. ο χ.κ. S είναι αριθμήσιμος
2. δεδομένου ότι βρίσκεται σε μια κατάσταση i υπάρχουν τ.μ. $T_{ik} \sim Exp(q_{ik})$ $k \in S$, $k \neq i$ και η επόμενη μεταβ. της $\{X(t)\}$ θα γίνει τη στιγμή $\min_{k \neq i} T_{ik}$ και θα είναι προς την κατάσταση j με $T_{ij} = \min_{k \neq i} T_{ik}$

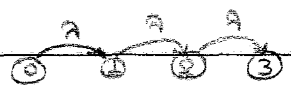
⑧ Παράδειγμα: Η διαδικασία Poisson

$Q(t)$ = # πελατών που φθάνουν

1. $S = \{0,1,2,\dots\}$ αριθμήσιμο ✓

2.

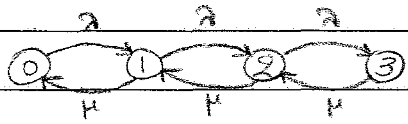
Κατάστ.	Επόμ. Κατάστ.	Χρόνος
$n \geq 0$	$n+1$	$T_{n,n+1} \sim Exp(\lambda)$



⑨ Παράδειγμα: Η M/M/1 ουρά

- Poisson (λ) διαδικασία αφίξεων
- $Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπ.
- 1 υπηρέτης
- ∞ χωρητικότητα

Κατάστ.	Επόμ. Κατάστ.	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
$n \geq 1$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
	$n-1$	$Exp(\mu)$



⑩ Παράδειγμα: Η M/D/1 ουρά

Όχι Μαρκ

⑪ Αδιαχώριστη Μαρκ

Αδιαχ Μαρκ $\Leftrightarrow$ Για κάθε κατάσταση i και j, $i \neq j$ $\exists$ $i = i_0 \to i_1 \to i_2 \to \dots \to i_n = j$ ώστε $q_{i_0 i_1} q_{i_1 i_2} \dots q_{i_{n-1} i_n} > 0$