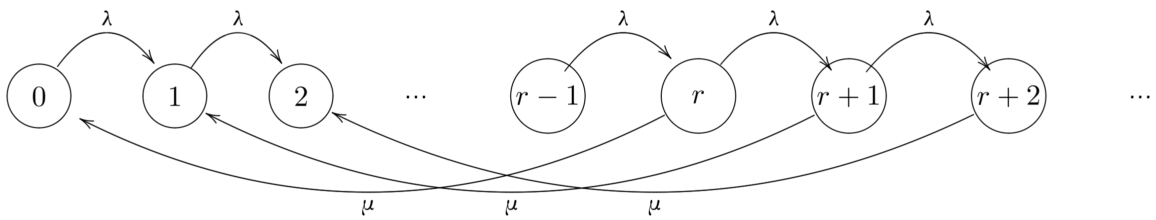
Η $M/M/1$ ουρά με ομαδικές εξυπηρετήσεις μεγέθους r

- Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων
- 1 υπηρέτης που εξυπηρετεί ταυτόχρονα r πελάτες
  Αν δεν υπάρχουν r πελάτες τότε περιμένει μέχρι να συμπληρωθούν, ώστε να αρχίσει την εξυπηρέτηση.
- Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης

Ορίζουμε $Q(t)$ να είναι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα τη χρονική στιγμή t.
Τότε η $\{Q(t),\ t \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου με διακριτό χώρο καταστάσεων, έστω S, $S = \{0, 1, ...\}$, το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της οποίας απεικονίζεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Έστω $\{p_n\ :\ n \in S\}$ η στάσιμη κατανομή της $\{Q(t),\ t \geq 0\}$.

1. Εξισώσεις Ισορροπίας

$\lambda p_o = \mu p_r$
$\lambda p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+r}, \quad 1 \leq n \leq r-1$
$(\lambda + \mu) p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+r}, \quad n \geq r$

2. Μετασχηματισμός των εξισώσεων ισορροπίας - Μέθοδος Πιθανογεννητριών

Ορίζουμε $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ την πιθανογεννήτρια της $\{p_n\}$.

Πολλαπλασιάζουμε την n-οστή εξίσωση ισορροπίας με z^n και τις αθροίζουμε.
Έχουμε :

$$\lambda p_o + \sum_{n=1}^{r-1} \lambda p_n z^n + \sum_{n=r}^{\infty} (\lambda + \mu) p_n z^n = \mu p_r + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda p_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \mu p_{n+r} z^n \iff$$

$$\iff \lambda \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n + (\lambda + \mu)(\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n) = \lambda z \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} z^{n-1} + \mu \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+r} z^n \iff$$

$$\iff \lambda \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n + (\lambda + \mu) \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n - (\lambda + \mu) \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n = \lambda z \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k + \frac{\mu}{z^r} \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+r} z^{n+r} \iff$$

$$\iff (\lambda + \mu) \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n - \mu \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n = \lambda z \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k + \frac{\mu}{z^r} \sum_{h=r}^{\infty} p_h z^h \iff$$

$$\Longleftrightarrow (\lambda+\mu)\sum_{n=0}^{\infty}p_n z^n - \mu\sum_{n=0}^{r-1}p_n z^n = \lambda z\sum_{k=0}^{\infty}p_k z^k + \frac{\mu}{z^r}(\sum_{h=0}^{\infty}p_h z^h - \sum_{h=0}^{r-1}p_h z^h) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\lambda+\mu)P(z) - \mu\sum_{n=0}^{r-1}p_n z^n = \lambda z P(z) + \frac{\mu}{z^r}\left(P(z) - \sum_{n=0}^{r-1}p_n z^n\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow P(z)\left(\lambda+\mu-\lambda z-\frac{\mu}{z^r}\right) = \mu\sum_{n=0}^{r-1}p_n z^n - \frac{\mu}{z^r}\sum_{n=0}^{r-1}p_n z^n \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow P(z)\left((\lambda+\mu)z^r - \lambda z^{r+1} - \mu\right) = \mu z^r\sum_{n=0}^{r-1}p_n z^n - \mu\sum_{n=0}^{r-1}p_n z^n \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow P(z)\left((\lambda+\mu)z^r - \lambda z^{r+1} - \mu\right) = (\mu z^r - \mu)\sum_{n=0}^{r-1}p_n z^n \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow P(z) = \frac{(\mu z^r - \mu)\sum_{n=0}^{r-1}p_n z^n}{(\lambda+\mu)z^r - \lambda z^{r+1} - \mu}$$

Διαιρώντας με μ και θέτοντας $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ η τελευταία σχέση παίρνει τη μορφή

$$P(z) = \frac{(z^r - 1)\sum_{n=0}^{r-1}p_n z^n}{(1+\rho)z^r - \rho z^{r+1} - 1} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Γνωρίζουμε ότι η παραπάνω πιθανογεννήτρια συγκλίνει για τιμές του z στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο, όταν δηλαδή $|z| \leq 1$. Παρατηρούμε ότι ο βαθμός του παρονομαστή $D(z) = (1+\rho)z^r - \rho z^{r+1} - 1$ είναι $r+1$, και συνεπώς θα έχει $r+1$ ρίζες, έστω τις $z_o, z_1, ..., z_r$. Έστω ότι έχει μια ρίζα στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου και έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι είναι η ρίζα z_o, όπου $|z_o| < 1$, τότε η $P(z)$ θα είχε πόλο στο z_0, αν $N(z_0) \neq 0$, το οποίο είναι άτοπο, εφόσον η πιθανογεννήτρια $P(z)$ συγκλίνει $\forall \ \ z \in \{z \ : |z| \leq 1\}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ρίζα z_o θα πρέπει να είναι και ρίζα του αριθμητή $N(z) = (z^r - 1)\sum_{n=0}^{r-1}p_n z^n$. Κατ' επέκταση κάθε ρίζα του παρονομαστή $D(z) = (1+\rho)z^r - \rho z^{r+1} - 1$ που βρίσκεται στον μοναδιαίο δίσκο, δηλαδή κάθε $z_i \in \{z \ : \ |z| \leq 1\}$, θα πρέπει να είναι και ρίζα του αριθμητή $N(z) = (z^r - 1)\sum_{n=0}^{r-1}p_n z^n$. Το πρόβλημα ανάγεται λοιπόν στον προσδιορισμό των ριζών του παρονομαστή που βρίσκονται στον μοναδιαίο δίσκο, δηλ. στον προσδιορισμό του πλήθους των $z_i \in \{z \ : \ |z| \leq 1\}$. Τη λύση στο πρόβλημα μας θα δώσει το Θεώρημα του Rouché.

Θεώρημα 1 : Εφαρμογή του Θεωρήματος του Rouché
Έστω μια ακολουθία $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}_o}$ με $\alpha_n \geq 0$ για την οποία ισχύουν τα εξής

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n \leq 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty}n\alpha_n < \infty \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty}n^2\alpha_n < \infty$$

Έστω N θετικός ακέραιος. Θέτουμε

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n, \quad A(z) = z^N - a(z) \quad \text{και}$$

$$k = MK\Delta\{j - N \mid \text{για τους δείκτες } j \text{ που } \alpha_j \neq 0\}$$

Τότε :

Συνθήκες	$\sharp$ ριζών στο $\{z : \lvert z\rvert < 1\}$	$\sharp$ ριζών στο $\{z : \lvert z\rvert = 1\}$	$\sharp$ ριζών στο $\{z : \lvert z\rvert \leq 1\}$
$a(1) < 1$	N	0	N
$a(1) = 1,\ A'(1) > 0$	$N - k$	k (απλές, τις k-οστές ρίζες της 1)	N
$a(1) = 1,\ A'(1) = 0$	$N - k$	k (διπλές, τις k-οστές ρίζες της 1)	$N + k$
$a(1) = 1,\ A'(1) < 0$	N	k (απλές, τις k-οστές ρίζες της 1)	$N + k$

3. Προσδιορισμός της στάσιμης κατανομής της $M/M^c/1$ ουράς

$$P(z) = \frac{(z^r - 1)\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n}{(1+\rho)z^r - \rho z^{r+1} - 1} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$D(z) = (1+\rho)\left(z^r - \frac{1}{1+\rho} - \frac{\rho}{1+\rho} z^{r+1}\right)$$

Ορίζουμε την ακολουθία $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}_o}$ με $\alpha_0 = \frac{1}{1+\rho}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$, $\alpha_{r+1} = \frac{\rho}{1+\rho}$ και $\alpha_n = 0\ \forall n \geq r+2$. Τότε για την ακολουθία που ορίσαμε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n < \infty$ και $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \alpha_n < \infty$. Θέτουμε

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n = \frac{1}{1+\rho} + \frac{\rho}{1+\rho} z^{r+1}, \quad A(z) = z^r - a(z) \quad \text{και}$$

$$k = MK\Delta\{j - r \mid \text{για τους δείκτες } j \text{ που } \alpha_j \neq 0\} = MK\Delta\{j - r \mid \text{για } j = 0 \text{ και } j = r+1\} =$$
$$= MK\Delta\{-r, 1\} = 1$$

Παρατηρούμε ότι

$$a(1) = \frac{1}{1+\rho} + \frac{\rho}{1+\rho} = 1$$

και

$$A'(z) = \left(z^r - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n\right)' = r z^{r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1} = r z^{r-1} - (r+1)\frac{\rho}{1+\rho} z^r$$

$$\Rightarrow A'(1) = r - (r+1)\frac{\rho}{1+\rho} = \frac{r}{1+\rho} - \frac{\rho}{1+\rho}$$

Θα διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

i) $A'(1) > 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{r}{1+\rho} - \frac{\rho}{1+\rho} > 0 \ \Leftrightarrow r > \rho$. Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζοντας το θεώρημα 1 έπεται ότι το πολυώνυμο $D(z)$ έχει $r-1$ ρίζες στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου, έστω τις $z_1, z_2, \ldots, z_{r-1}$ όπου $z_i \in \{z : |z| < 1\}$ $i = 1, \ldots, r-1$, έχει 1 ρίζα τη μονάδα, έστω $z_r = 1$, και άρα θα έχει μια ρίζα, έστω z_0, με $|z_0| > 1$, άρα $D(z) = c_2(z - z_0)(z - z_1)\ldots(z - z_{r-1})(z-1)$. Από τον προηγούμενο ισχυρισμό απαιτούμε ο αριθμητής $N(z)$ να έχει ρίζες τις $z_1, z_2, \ldots, z_{r-1}$, καθώς και τη 1. Συνεπώς ο αριθμητής $N(z) = (z^r - 1)\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n$ μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί στη μορφή $N(z) = (z^r - 1)c_1(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{r-1})$, εφόσον το $\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n$ είναι πολυώνυμο βαθμού $r-1$. Τελικά

$$P(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{(z^r - 1)c_1(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{r-1})}{c_2(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{r-1})(z-1)} = c\frac{(z^r - 1)}{(z - z_0)(z - 1)} =$$

$$= c\frac{1+z+...+z^{r-1}}{(z-z_0)}$$

Η σταθερά c θα προσδιοριστεί από την εξίσωση κανονικοποίησης $P(1) = 1$, τότε θα πάρουμε $1 = c\frac{1+1+...+1^{r-1}}{(1-z_0)} = c\frac{r}{1-z_0} \Rightarrow c = \frac{1-z_0}{r}$.

Τότε

$$P(z) = \frac{1-z_0}{r}\frac{1+z+...+z^{r-1}}{(z-z_0)} = \frac{1+z+...+z^{r-1}}{r}\frac{z_0-1}{z_0-z} =$$

$$= \frac{1+z+...+z^{r-1}}{r}\frac{1-\frac{1}{z_0}}{1-\frac{z}{z_0}} =$$

$$= \frac{1+z+...+z^{r-1}}{r}(1-\frac{1}{z_0})\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_0}\right)^n \Rightarrow$$

$$P(z) = \frac{1+z+...+z^{r-1}}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_0}\right)\left(\frac{1}{z_0}\right)^n z^n$$

ii) $A'(1) = 0 \;\Leftrightarrow\; r = \rho$. Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζοντας το θεώρημα 1 έπεται ότι το πολυώνυμο $D(z)$ έχει $r-1$ ρίζες στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου, έστω τις $z_1, z_2, ..., z_{r-1}$ όπου $z_i \in \{z : |z| < 1\}$ $i = 1, ..., r-1$ και έχει 1 διπλή ρίζα τη μονάδα, άρα $D(z) = c_2(z-z_1)...(z-z_{r-1})(z-1)^2$. Από τον προηγούμενο ισχυρισμό απαιτούμε ο αριθμητής $N(z)$ να έχει ρίζες τις $z_1, z_2, ..., z_{r-1}$ καθώς και διπλή ρίζα τη μονάδα. Θα έπρεπε, δηλαδή, $N(z) = (z^r-1)\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n = (z^r-1)c_1(z-z_1)...(z-z_{r-1})(z-1)$ όμως το $\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n$ είναι πολυώνυμο βαθμού $r-1$ και άρα δεν μπορεί να γραφτεί σαν γινόμενο r παραγόντων, οπότε το $\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n$ είναι ταυτοτικά 0. Άρα $P(z) = 0$. Συνεπώς η περίπτωση $r = \rho$ αποκλείεται (αστάθεια).

iii) $A'(1) < 0 \;\Leftrightarrow\; r < \rho$. Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζοντας το θεώρημα 1 έπεται ότι το πολυώνυμο $D(z)$ έχει r ρίζες στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου, έστω τις $z_1, z_2, ..., z_r$ όπου $z_i \in \{z : |z| < 1\}$ $i = 1, ..., r$ και έχει 1 απλή ρίζα τη μονάδα, άρα $D(z) = c_2(z-z_1)...(z-z_r)(z-1)$. Από τον προηγούμενο ισχυρισμό απαιτούμε ο αριθμητής $N(z)$ να έχει ρίζες τις $z_1, z_2, ..., z_r$, καθώς και τη 1. Θα έπρεπε (όπως και στην προηγούμενη περίπτωση) $N(z) = (z^r-1)\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n = (z^r-1)c_1(z-z_1)...(z-z_r)$ όμως το $\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n$ είναι πολυώνυμο βαθμού $r-1$ και άρα δεν μπορεί να γραφτεί σαν γινόμενο r παραγόντων, οπότε το $\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n$ είναι ταυτοτικά 0. Άρα $P(z) = 0$. Συνεπώς η περίπτωση $r < \rho$ επίσης αποκλείεται (αστάθεια).

Παρατηρούμε ότι η χρήση του θεωρήματος 1 μας οδηγεί μέσα από λογικούς ισχυρισμούς στην εύρεση της συνθήκης ευστάθειας, ότι $r < \rho$, κάτι που επιβεβαιώνεται από την διαίσθηση μας. Στο σύστημα μας εξυπηρετούνται ταυτόχρονα r, ακριβώς, πελάτες. Για να είναι το σύστημα μας ευσταθές θα πρέπει ο ρυθμός αφίξεων να είναι μικρότερος από τον ρυθμό εξυπηρέτησης του συστήματος, δηλαδή θα πρέπει $\lambda < r\mu \;\Rightarrow\; \rho < r$ (ή ισοδύναμα θα πρέπει ο ρυθμός συνωστισμού να είναι μικρότερος από τη δυνατότητα εξυπηρέτησης του συστήματος).