ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2010

Θέμα 1. (4.0 βαθμ.) Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, 1 υπηρέτη και απεριόριστη χωρητικότητα με αποθαρρυνόμενους πελάτες και μεταβλητό ρυθμό εξυπηρέτησης. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι ένας πελάτης που βρίσκει n άτομα στο σύστημα κατά την άφιξή του αναχωρεί άμεσα, χωρίς να εξυπηρετηθεί, με πιθανότητα $\frac{2^n-1}{2^n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Επιπλέον η ταχύτητα του υπηρέτη όταν υπάρχουν n άτομα στο σύστημα είναι $\frac{1}{2^{n-1}}$ (δηλαδή ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι $\mu_n = \frac{\mu}{2^{n-1}}$), $n = 1, 2, 3, \ldots$. Θέτουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

(α) (1.0 βαθμ.) Πότε το σύστημα είναι ευσταθές (στάσιμο); Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών στο σύστημα $\{Q(t)\}$, όταν είναι ευσταθές.

(β) (1.0 βαθμ.) Να βρεθούν οι οριακές κατανομές $(r_n^{\pi\rho\alpha\gamma\mu})$ και $(d_n^{\pi\rho\alpha\gamma\mu})$ των εμφυτευμένων διαδικασιών του αριθμού των πελατών σε στιγμές πραγματικών αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα (δηλαδή λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους πελάτες που εισέρχονται στο σύστημα και εξυπηρετούνται).

(γ) (0.5 βαθμ.) Να υπολογιστεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό των πελατών που αποχωρούν χωρίς να εξυπηρετηθούν (μακροπρόθεσμο ποσοστό χαμένων πελατών).

(δ) (1.0 βαθμ.) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα (δηλαδή ο μέσος χρόνος από τη στιγμή εισόδου στο σύστημα μέχρι την έναρξη εξυπηρέτησης) για έναν πελάτη που δεν αναχωρεί άμεσα κατά την άφιξή του, αλλά εισέρχεται στο σύστημα.

(ε) (0.5 βαθμ.) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος από τη στιγμή που φθάνει ένας πελάτης σε κενό σύστημα μέχρι την επόμενη φορά που το σύστημα θα είναι ξανά κενό.

Θέμα 2. (4.0 βαθμ.) Θεωρούμε τη $M/M/2$ ουρά με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, 2 υπηρέτες και απεριόριστη χωρητικότητα.

(α) (1.0 βαθμ.) Να βρεθεί η πιθανότητα ένας αφικνούμενος πελάτης να αρχίσει άμεσα την εξυπηρέτησή του.

(β) (1.0 βαθμ.) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη που κατά την άφιξή του βρίσκει n άτομα.

(γ) (1.0 βαθμ.) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη.

(δ) (1.0 βαθμ.) Έστω ότι σε κάποια χρονική στιγμή στο συγκεκριμένο σύστημα εξυπηρέτησης βρίσκονται παρόντες 3 πελάτες, οι Π1, Π2 και Π3 εκ των οποίων οι Π1 και Π2 βρίσκονται σε διαδικασία εξυπηρέτησης στους δυο υπηρέτες, ενώ ο Π3 βρίσκεται στην ουρά. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο Π3 να αναχωρήσει από το σύστημα πριν από τον Π1.

Θέμα 3. (3.0 βαθμ.) Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με ομαδικές αφίξεις και ολικές εξυπηρετήσεις. Συγκεκριμένα, ομάδες πελατών φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Κάθε αφικνούμενη ομάδα αποτελείται από j πελάτες με πιθανότητα $\frac{1}{2^j}$, $j = 1, 2, \ldots$. Οι διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παράμετρο μ. Κάθε φορά που τελειώνει ένας χρόνος εξυπηρέτησης όλοι οι παρόντες πελάτες αναχωρούν από το σύστημα και το σύστημα αδειάζει (π.χ. το σύστημα μπορεί να μοντελοποιεί μια στάση μεταφορικού μέσου, όπου οι πελάτες-επιβάτες φθάνουν κατά ομάδες σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και το μεταφορικό μέσο περνά κάθε κάθε φορά μετά από εκθετικό χρόνο με παράμετρο μ και απομακρύνει από τη στάση όλους τους πελάτες-επιβάτες).

(α) (0.5 βαθμ.) Αιτιολογήστε σύντομα γιατί η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ που καταγράφει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, σχεδιάστε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασής της και γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή (p_n).

(β) (1.5 βαθμ.) Προσδιορίστε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$.

(γ) (1.0 βαθμ.) Βρείτε ένα γενικό τύπο για τις στάσιμες πιθανότητες p_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Ουρές Αναμονής, Σεπτέμβριος 2010. Λύσεις:

Θέμα 1.

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της $\{Q(t)\}$ είναι

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\frac{\lambda}{2}"] & 2 \arrow[l, bend left, "\frac{\mu}{2}"] \arrow[r, bend left, "\frac{\lambda}{2^2}"] & 3 \arrow[l, bend left, "\frac{\mu}{2^2}"] \arrow[r, bend left, "\frac{\lambda}{2^3}"] & 4 \arrow[l, bend left, "\frac{\mu}{2^3}"] \arrow[r, bend left, "\frac{\lambda}{2^4}"] & 5 \arrow[l, bend left, "\frac{\mu}{2^4}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Πρόκειται για απλή Μαρκοβιανή ουρά με ρυθμούς άφιξης, αναχώρησης

$\lambda_n = \lambda/2^n, \quad n=0,1,\ldots$

$\mu_n = \mu/2^{n-1}, \quad n=1,2,\ldots$

Είναι $\dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} = \dfrac{\lambda}{\mu} = \rho, \quad n=1,2,\ldots$

Επομένως

$$\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \rho^n, \quad n=1,2,\ldots$$

οπότε

$$B^{-1} = 1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n = \begin{cases}\dfrac{1}{1-\rho}, & \text{αν } \rho<1\\ \infty, & \text{αν } \rho\geq 1.\end{cases}$$

Επομένως το σύστημα είναι ευσταθές για $\rho<1$ και στην περίπτωση αυτή η στάσιμη κατανομή είναι

$$p_n = \begin{cases} B, & n=0\\ B\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}, & n=1,2,\ldots\end{cases} = (1-\rho)\rho^n, \quad n=0,1,\ldots$$

Ο ρυθμός πραγματικών αφίξεων στο σύστημα είναι

$$\lambda^* = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda}{2^n}(1-\rho)\rho^n = \frac{\lambda(1-\rho)}{1-\frac{\rho}{2}} = \frac{2\lambda(1-\rho)}{2-\rho}.$$

Επομένως

$$r_n^{\text{πραγμ}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Ιδιότητα μέσων}\\ \text{αφίξεων-αναχωρήσεων}}}{=} d_n^{\text{πραγμ}} = \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*} = \frac{\frac{\cancel{\lambda}}{2^n}\cancel{(1-\rho)}\rho^n}{\frac{2\cancel{\lambda}\cancel{(1-\rho)}}{2-\rho}} = \left(1-\frac{\rho}{2}\right)\left(\frac{\rho}{2}\right)^n, \quad n=0,1,\ldots$$

Το μακροπρόθεσμο ποσοστό των χαμένων πελατών του συστήματος είναι

$$1-\frac{\lambda^*}{\lambda} = 1-\frac{2(1-\rho)}{2-\rho} = \frac{\cancel{2}-\rho-\cancel{2}+2\rho}{2-\rho} = \frac{\rho}{2-\rho}$$

Εναλλακτικά βρίσκεται και ως

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n^{\text{ολικό}}\frac{2^n-1}{2^n} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{PASTA}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} p_n\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n}{2^n} = 1-\sum_{n=0}^{\infty}(1-\rho)\left(\frac{\rho}{2}\right)^n$$

$$= 1-(1-\rho)\cdot\frac{1}{1-\frac{\rho}{2}} = 1-\frac{2(1-\rho)}{2-\rho} = \frac{\rho}{2-\rho}.$$

Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι

$$E[Q_q] = \sum_{n=0}^{\infty} n P[Q_q=n] = \sum_{n=1}^{\infty} n P[Q_q=n] = \sum_{n=1}^{\infty} n P[Q=n+1]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n p_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\rho)\rho^{n+1}$$

Όμως

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \overset{d/dx}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \overset{\cdot x^2}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}, \ |x|<1$$

οπότε για $x=\rho$ έχουμε

$$E[Q_q] = (1-\rho)\cdot\frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Από το νόμο του Little, εφαρμοζόμενο στο χώρο αναμονής του συστήματος έχουμε

$$E[Q_q] = \lambda^* E[W],$$

όπου το $E[W]$ είναι ο μέσος χρόνος αναμονής για έναν πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα.

Επομένως

$$\frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{2\lambda(1-\rho)}{2-\rho} E[W]$$

οπότε

$$E[W] = \frac{\rho^2(2-\rho)}{2\lambda(1-\rho)^2}.$$

Έστω Y μια περίοδος συνεχούς λειτουργίας του συστήματος, δηλαδή ο χρόνος από τη στιγμή που ένας πελάτης βρίσκει το σύστημα κενό μέχρι την επόμενη στιγμή που θα μείνει το σύστημα κενό και I η αντίστοιχη περίοδος αργίας του συστήματος.

Τότε

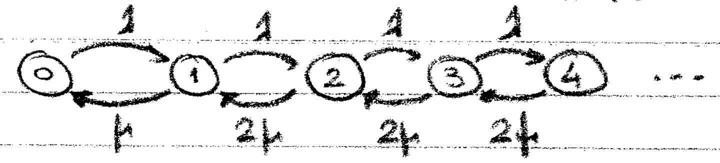
$$\frac{E[I]}{E[I]+E[Y]} = p_0.$$

Όμως $p_0 = 1-\rho$ και $E[I] = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda}$ οπότε

$$\frac{1/\lambda}{1/\lambda + E[Y]} = 1-\rho \Longrightarrow E[Y] = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Θέμα 2.

Η M/M/2 ουρά έχει διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



και είναι ευσταθής όταν $\lambda < 2\mu \Leftrightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 2$.

Η στάσιμη κατανομή είναι τότε

$$p_n = \begin{cases} B & \text{αν } n=0 \\ B\frac{\rho^n}{2^{n-1}}, & \text{αν } n \geq 1, \end{cases}$$

όπου

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{2^{n-1}} = 1 + \frac{\rho}{1-\rho/2} = 1 + \frac{2\rho}{2-\rho} = \frac{2+\rho}{2-\rho}.$$

Άρα

$$p_n = \begin{cases} \frac{2-\rho}{2+\rho}, & \text{αν } n=0 \\ \frac{2-\rho}{2+\rho}\cdot\frac{\rho^n}{2^{n-1}}, & \text{αν } n \geq 1. \end{cases}$$

Η πιθανότητα ένας πελάτης να αρχίσει άμεσα την εξυπηρέτησή του είναι η πιθανότητα να βρει 0 ή 1 πελάτη κατά την άφιξή του οπότε θα υπάρχει ελεύθερος υπηρέτης. Επομένως είναι

$$P_{\text{άμεση έναρξη εξυπηρέτησης}} = r_0 + r_1 \overset{PASTA}{=} p_0 + p_1 = \frac{2-\rho}{2+\rho} + \frac{2-\rho}{2+\rho}\cdot\rho$$

$$= \frac{2-\rho+2\rho-\rho^2}{2+\rho} = \frac{2+\rho-\rho^2}{2+\rho} = \frac{(2-\rho)(1+\rho)}{2+\rho}.$$

Έστω S_n ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη που βρίσκει κατά την άφιξή του n άτομα. Τότε

$$E[S_0] = E[S_1] = \frac{1}{\mu},$$

αφού αν βρει 0 ή 1 άτομο αρχίζει αμέσως να εξυπηρετείται. Αν βρει $n \geq 2$ άτομα τότε μπαίνει στην ουρά και προχωράει μια θέση κάθε φορά που αναχωρεί πελάτης. Μέχρι να έρθει η σειρά του οι δύο υπηρέτες είναι συνεχώς απασχολημένοι και επομένως οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αναχωρήσεων πελατών είναι εκθετικοί με παράμετρο 2μ. Άρα

$$E[S_n] = (n-1)\cdot\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{\mu}, \quad n \geq 2$$

Έστω S ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη. Τότε

$$E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} r_n E[S_n] \overset{PASTA}{=} \sum_{n=0}^{\infty} p_n E[S_n]$$

$$= \frac{1}{\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\rho}{2+\rho}\cdot\frac{\rho^n}{2^{n-1}}\cdot(n-1)\frac{1}{2\mu} = \frac{1}{\mu} + \frac{2-\rho}{2+\rho}\cdot\frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\left(\frac{\rho}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\mu} + \frac{2-\rho}{2+\rho} \cdot \frac{1}{\mu} \sum_{j=0}^{\infty} j \left(\frac{\rho}{2}\right)^{j+1} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{2-\rho}{2+\rho} \cdot \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{\rho}{2}\right)^2}\right)$$

Δες σελ. 2 των λύσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{(2-\rho)\,\rho^2}{(2+\rho)(2-\rho)^2}\right) = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{\rho^2}{(2+\rho)(2-\rho)}\right) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{4 - \cancel{\rho^2} + \cancel{\rho^2}}{(2+\rho)(2-\rho)}$$

$$= \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}.$$

Εναλλακτικά το $E[S]$ μπορεί να βρεθεί από το νόμο του Little $E[Q] = \lambda E[S]$,

οπότε

$$E[S] = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{2-\rho}{2+\rho} \cdot \frac{\rho^n}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{4}{\lambda(2+\rho)} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n \left(1-\frac{\rho}{2}\right)\left(\frac{\rho}{2}\right)^n}_{\substack{\text{Μέση τιμή γεωμ. κατανομής} \\ \frac{\rho/2}{1-\rho/2}}} = \frac{4}{\lambda(2+\rho)} \cdot \frac{\rho}{2-\rho} = \frac{4\rho}{\lambda(2+\rho)(2-\rho)}$$

$$\overset{\rho=\lambda/\mu}{=} \frac{4}{\mu(2+\rho)(2-\rho)}.$$

Έστω ότι στο σύστημα βρίσκονται παρόντες 3 πελάτες Π1, Π2, Π3 και έστω X_1, X_2, X_3 οι υπολειπόμενοι χρόνοι εξυπηρέτησής τους. Τότε, λόγω της αμνημοσύνης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής, έχουμε ότι οι X_1, X_2, X_3 ακολουθούν εκθετικές κατανομές με παράμετρο μ και είναι ανεξάρτητες. Αφού οι Π1 και Π2 βρίσκονται σε διαδικασία εξυπηρέτησης, για να αναχωρήσει ο Π3 από το σύστημα πριν τον Π1 θα πρέπει $X_2 + X_3 < X_1$.
Η $X_2 + X_3$ ακολουθεί Erlang με παραμέτρους $2, \mu$. Έχουμε

$$P_{\text{ο Π3 αναχωρεί πριν τον Π1}} = P[X_2 + X_3 < X_1]$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\mu^2}{1!} x e^{-\mu x} P[x < X_1]\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\mu^2}{1!} x e^{-\mu x} e^{-\mu x}\, dx$$

$$= \mu^2 \int_0^{\infty} x e^{-2\mu x}\, dx = \mu^2 \cdot \frac{1}{(2\mu)^2} = \frac{1}{4}.$$

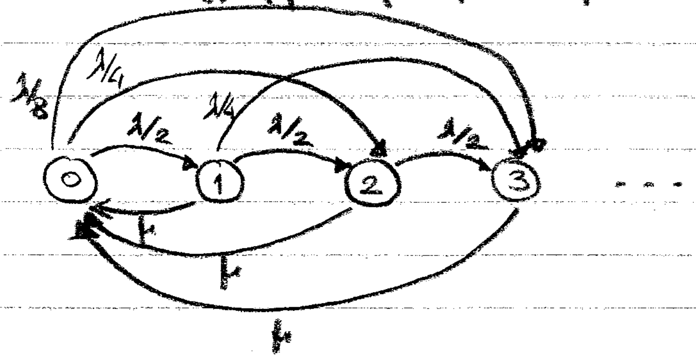
Θέμα 3.

Ο πίνακας των άμεσα δυνατών μεταβάσεων είναι

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Χρόνος
0	$j \geq 1$	$Exp(\lambda/2^j)$
$n \geq 1$	$n+j,\ j \geq 1$	$Exp(\lambda/2^j)$
	0	$Exp(\mu)$

Όλα Exp $\Rightarrow$ $\{Q(t)\}$ Μ.α.σ.χ.

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι



Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\lambda p_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu p_n$$

$$(\lambda+\mu) p_n = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda/2^{n-j}\, p_j, \quad n \geq 1.$$

Πολ/ζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας με z^n και αθροίζοντας έχουμε:

$$\lambda p_0 + (\lambda+\mu) \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = \mu \sum_{n=1}^{\infty} p_n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} p_j \cdot \frac{1}{2^{n-j}} z^n$$

$\Longrightarrow$

$$(\lambda+\mu) P(z) - \cancel{\mu p_0} = \mu - \cancel{\mu p_0} + \lambda \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{z^{n-j}}{2^{n-j}}$$

$\Longrightarrow$

$$(\lambda+\mu) P(z) = \mu + \lambda \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^m$$

$\Longrightarrow$

$$(\lambda+\mu) P(z) = \mu + \lambda P(z) \cdot \frac{\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}$$

$\Longrightarrow$

$$(\lambda+\mu) P(z) = \mu + \frac{\lambda z}{2-z} P(z)$$

$$[(\lambda+\mu)(2-z)-\lambda z]\,P(z)=\mu(2-z)$$

$\Rightarrow$

$$[2(\lambda+\mu)-(2\lambda+\mu)z]\,P(z)=\mu(2-z)$$

$\Rightarrow$

$$P(z)=\frac{\mu(2-z)}{2(\lambda+\mu)-(2\lambda+\mu)z}$$

Έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_n z^n=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{1}{1-\frac{2\lambda+\mu}{2\lambda+2\mu}z}-\frac{\mu z}{2(\lambda+\mu)}\cdot\frac{1}{1-\frac{2\lambda+\mu}{2\lambda+2\mu}z}$$

$$=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\lambda+\mu}{2\lambda+2\mu}\right)^n z^n-\frac{\mu z}{2(\lambda+\mu)}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2\lambda+\mu}{2\lambda+2\mu}\right)^j z^j$$

$$=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\lambda+\mu}{2\lambda+2\mu}\right)^n z^n-\frac{\mu}{2(\lambda+\mu)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\lambda+\mu}{2\lambda+2\mu}\right)^{n-1} z^n.$$

Άρα

$$p_0=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$p_n=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{2\lambda+\mu}{2\lambda+2\mu}\right)^n-\frac{\mu}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{2\lambda+\mu}{2\lambda+2\mu}\right)^{n-1},\quad n\geq 1.$$