ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2010

Θέμα 1. (3.5 βαθμ.) Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/3$ ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, 3 υπηρέτες και απεριόριστη χωρητικότητα με αποθαρρυνόμενους πελάτες. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι ένας πελάτης που βρίσκει $n \leq 2$ άτομα στο σύστημα (δηλαδή τουλάχιστον ένα ελεύθερο υπηρέτη) εισέρχεται σε αυτό με πιθανότητα 1, ενώ ένας πελάτης που βρίσκει $n \geq 3$ άτομα εισέρχεται σε αυτό με πιθανότητα $\frac{3}{n+1}$. Θέτουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

(α) Αιτιολογήστε σύντομα γιατί η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών είναι διαδικασία γέννησης-θανάτου και σχεδιάστε το αντίστοιχο διάγραμμα ρυθμών μετάβασης. Πότε το σύστημα είναι ευσταθές (στάσιμο); Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών $\{Q(t)\}$, όταν είναι ευσταθές.

(β) Να υπολογιστεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό των πελατών που αποχωρούν χωρίς να εξυπηρετηθούν (μακροπρόθεσμο ποσοστό χαμένων πελατών).

(γ) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη, λαμβάνοντας υπόψιν όλους τους πελάτες (είτε εισέρχονται στο σύστημα είτε όχι). Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη, δεδομένου ότι βρίσκει κατά την άφιξή του n πελάτες και εισέρχεται σε αυτό.

Θέμα 2. (3.5 βαθμ.) Θεωρούμε τη $M/M/1$ ουρά με ομαδικές αφίξεις και μεμονωμένες εξυπηρετήσεις ($M^c/M/1$ ουρά). Ο ρυθμός αφίξεων των ομάδων είναι λ και ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ. Κάθε αφικνούμενη ομάδα αποτελείται από 2 ή 3 πελάτες με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{3}$ αντίστοιχα. Έστω $\{Q(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών στο σύστημα.

(α) Αιτιολογήστε σύντομα γιατί η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ που καταγράφει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, σχεδιάστε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασής της και γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή (p_n).

(β) Βρείτε τη συνθήκη ευστάθειας του συστήματος και προσδιορίστε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$.

(γ) Βρείτε το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα. Βρείτε το μέσο χρόνο από τη στιγμή που μια ομάδα εισέρχεται στο σύστημα μέχρι τη στιγμή που ο τελευταίος πελάτης της αναχωρεί από αυτό.

Θέμα 3. (1.5 βαθμ.) Να μοντελοποιηθεί ως Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου η $M/E_2/1/3$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ (ισοδύναμα μέσο χρόνο εξυπηρέτησης $\frac{1}{\mu}$). Περιγράψτε τις καταστάσεις και σχεδιάστε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

Θέμα 4. (2.5 βαθμ.) Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο φθάνουν πελάτες δύο τύπων 1 και 2, σύμφωνα με δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Το σύστημα έχει 2 υπηρέτες και δεν υπάρχει χώρος αναμονής (δηλαδή στο σύστημα εισέρχονται μόνο οι πελάτες που κατά την άφιξή τους μπορούν να αρχίσουν άμεσα την εξυπηρέτησή τους ενώ οι υπόλοιποι φεύγουν). Κάθε πελάτης τύπου 1 δεσμεύει μόνο έναν από τους δυο υπηρέτες για να εξυπηρετηθεί ενώ κάθε πελάτης τύπου 2 δεσμεύει και τους δυο υπηρέτες για να εξυπηρετηθεί. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι εκθετικοί με ρυθμό μ και για τους δυο τύπους πελατών (δηλαδή όταν εξυπηρετείται ένας πελάτης τύπου 1 δεσμεύει έναν υπηρέτη για εκθετικό χρόνο με παράμετρο μ ενώ αν εξυπηρετείται ένας πελάτης τύπου 2 τότε δεσμεύονται και οι δυο υπηρέτες για εκθετικό χρόνο με παράμετρο μ και απελευθερώνονται ταυτόχρονα μόλις τελειώσει η εξυπηρέτηση του πελάτη).

(α) Να μοντελοποιηθεί ως Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου το σύστημα. Περιγράψτε τις καταστάσεις και σχεδιάστε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

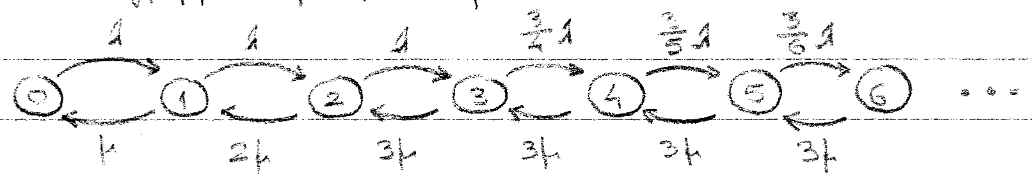
(β) Βρείτε τα μακροπρόθεσμα ποσοστά των χαμένων πελατών τύπου 1 και 2 (δηλαδή βρείτε τις πιθανότητες άμεσης αποχώρησης για τους πελάτες τύπου 1 και 2).

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Λύσεις των θεμάτων στις Ουρές Αναμονής, Φεβρουάριος 2010

Θέμα 1:

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι



Πρόκειται για απλή Μαρκοβιανή ουρά με ρυθμούς άφιξης, αναχώρησης

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & 0 \le n \le 2 \\ \frac{3\lambda}{n+1} & n \ge 3 \end{cases} \qquad \mu_n = \min(3,n)\mu \ , \ n \ge 1.$$

Είναι

$$\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu} & , n=1 \\ \frac{\lambda}{2\mu} & , n=2 \\ \frac{\lambda}{3\mu} & , n=3 \\ \frac{3\lambda/n}{3\mu} & , n \ge 4 \end{cases} = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\rho}{n} \ , \quad n \ge 1.$$

Επομένως

$$\frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \frac{\rho^n}{n!} \ , \quad n \ge 1,$$

και άρα

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho} < \infty$$

οπότε το σύστημα είναι πάντα ευσταθές. Η στάσιμη κατανομή είναι

$$P_n = \begin{cases} B & n=0 \\ B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} & n \ge 1 \end{cases} = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!} \ , \quad n \ge 0.$$

Το μακροπρόθεσμο ποσοστό χαμένων πελατών είναι

$$1 - \frac{\lambda^*}{\lambda},$$

όπου λ^* ο ρυθμός άφιξης των πελατών που μπαίνουν στο σύστημα. Είναι

$$\lambda^* = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n = \lambda(p_0 + p_1 + p_2) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3\lambda}{n+1} p_n = \lambda e^{-\rho}\left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2}\right) + 3\lambda e^{-\rho} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\rho^n}{(n+1)!}$$

$$= \lambda e^{-\rho}\left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2}\right) + 3\lambda e^{-\rho} \underbrace{\frac{1}{\rho}}_{=\frac{\mu}{\lambda}} \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}}_{e^{\rho} - 1 - \rho - \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{6}}$$

$$= \lambda e^{-\rho}\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2}\right)+3\mu-3\mu e^{-\rho}\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^3}{6}\right)$$

Άρα το ποσοστό των χαμένων πελατών είναι

$$1-\frac{\lambda^*}{\lambda} = 1-e^{-\rho}\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2}\right)-3\rho^{-1}+3\rho^{-1}e^{-\rho}\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^3}{6}\right).$$

Εναλλακτικά, δεσμεύοντας στο πλήθος των πελατών που βρίσκει κατά την άφιξή του ένας πελάτης και χρησιμοποιώντας την PASTA έχουμε ότι το ποσοστό των χαμένων πελατών είναι

$$\sum_{n=0}^{2} p_n \cdot 0 + \sum_{n=3}^{\infty} p_n\left(1-\frac{3}{n+1}\right) = \sum_{n=3}^{\infty} p_n - 3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{p_n}{n+1}$$

$$= 1-\sum_{n=0}^{2} e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!} - 3\rho^{-1}\sum_{n=3}^{\infty} e^{-\rho}\frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= 1-e^{-\rho}\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2}\right)-3\rho^{-1}+3\rho^{-1}e^{-\rho}\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^3}{6}\right).$$

Το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα είναι

$$E[Q]=\sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!} = e^{-\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{(n-1)!} = e^{-\rho}\rho\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}$$

$= \rho$ (Θα μπορούσε να βγει και απευθείας, παρατηρώντας ότι η (p_n) είναι Poisson με παράμετρο ρ)

Από το Θ. Little ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη λαμβάνοντας υπόψη όλους τους πελάτες είναι

$$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu}.$$

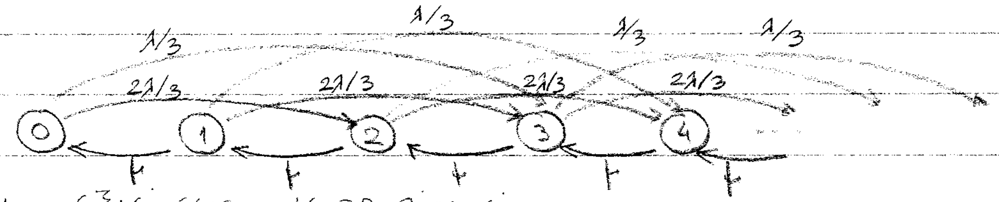
Ένας πελάτης που βρίσκει κατά την άφιξή του n πελάτες και εισέρχεται σε αυτό έχει μέσο χρόνο παραμονής:

Για $n=0,1,2$ $\quad E[S_n] = \frac{1}{\mu}$ (το χρόνο εξυπηρέτησής του)

Για $n \geq 3$ $\quad E[S_n] = \frac{1}{\mu}+(n-2)\frac{1}{3\mu}$ (πρέπει να περιμένει να φύγουν οι $n-2$ πελάτες που είναι μπροστά του ώστε να υπάρχει ελεύθερος υπηρέτης γι αυτόν και οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αναχωρήσεων είναι $Exp(3\mu)$ μέχρι να συμβεί αυτό).

Θέμα 2:

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι



Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$(\lambda+\mu)p_1 = \mu p_2$$

$$(\lambda+\mu)p_2 = \mu p_3 + \frac{2\lambda}{3}p_0$$

$$(\lambda+\mu)p_n = \mu p_{n+1} + \frac{2\lambda}{3}p_{n-2} + \frac{\lambda}{3}p_{n-3}, \quad n \geq 3.$$

Πολλαπλασιάζοντας την n-οστή εξίσωση με z^n και αθροίζοντας έχουμε

$$\lambda p_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda+\mu)p_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\mu p_{n+1}z^n + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\lambda}{3}p_{n-2}z^n + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\lambda}{3}p_{n-3}z^n \Rightarrow$$

$$(\lambda+\mu)P(z) - \mu p_0 = \frac{\mu}{z}\left(P(z)-p_0\right) + \frac{2\lambda z^2}{3}P(z) + \frac{\lambda z^3}{3}P(z) \Rightarrow$$

$$\left(\lambda+\mu - \frac{\mu}{z} - \frac{2\lambda z^2}{3} - \frac{\lambda z^3}{3}\right)P(z) = \mu p_0\left(1-\frac{1}{z}\right) \Longrightarrow$$

$$\left(3(\lambda+\mu)z - 3\mu - 2\lambda z^3 - \lambda z^4\right)P(z) = 3\mu p_0(z-1) \Longrightarrow$$

$$P(z) = \frac{3\mu p_0(z-1)}{3(\lambda+\mu)z - 3\mu - 2\lambda z^3 - \lambda z^4}$$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης, χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hospital έχουμε:

$$1 = P(1) = \frac{3\mu p_0}{3(\lambda+\mu) - 6\lambda - 4\lambda} \Rightarrow p_0 = 1 - \frac{7}{3}\cdot\frac{\lambda}{\mu}$$

Η συνθήκη ευστάθειας είναι $p_0 > 0$ δηλ. $\frac{7\lambda}{3\mu} < 1$. Τότε

$$P(z) = \frac{(3\mu - 7\lambda)(z-1)}{3(\lambda+\mu)z - 3\mu - 2\lambda z^3 - \lambda z^4} = \frac{3\mu - 7\lambda}{-\lambda z^3 - 3\lambda z^2 - 3\lambda z + 3\mu}$$

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι

$$E[Q] = P'(1) = -(3\mu - 7\lambda)\cdot\frac{-3\lambda - 6\lambda - 3\lambda}{(-\lambda - 3\lambda - 3\lambda + 3\mu)^2} = \frac{12\lambda(3\mu - 7\lambda)}{(3\mu - 7\lambda)^2} = \frac{12\lambda}{3\mu - 7\lambda}$$

Ο μέσος ρυθμός αφίξεων πελατών στο σύστημα ισούται με το γινόμενο του ρυθμού αφίξεων ομάδων επί το μέσο μέγεθος ομάδας. Άρα

$$\lambda_{\pi\varepsilon\lambda} = \lambda\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 3\right) = \frac{7}{3}\lambda .$$

Από το Θ. Little ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα είναι

$$E[S_{\pi\varepsilon\lambda}] = \frac{E[Q]}{\lambda_{\pi\varepsilon\lambda}} = \frac{36}{7(3\mu - 7\lambda)}.$$

Οι ομάδες φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με διαδικασία Poisson και επομένως από την ιδιότητα PASTA βλέπουν n πελάτες κατά την άφιξή τους με πιθανότητα τη στάσιμη πιθανότητα p_n. Κάθε ομάδα έχει 2 ή 3 πελάτες με πιθανότητες $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{3}$ αντίστοιχα. Άρα ο μέσος χρόνος που θα παραμείνει στο σύστημα μια ομάδα που βλέπει n πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξή της είναι

$$n\cdot\frac{1}{\mu} + \left(\frac{2}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{\mu} + \frac{1}{3}\cdot 3\,\frac{1}{\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{\mu}\left(n + \underbrace{\frac{7}{3}}_{\text{Μέσο μέγεθος αφικνούμενης ομάδας}}\right)$$

Άρα ο μέσος χρόνος παραμονής θα είναι

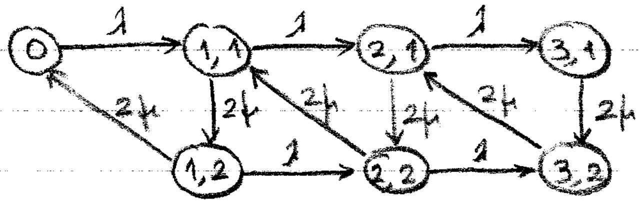
$$E[S_{o\mu\alpha\delta}] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\cdot\frac{1}{\mu}\left(n + \frac{7}{3}\right) = \frac{1}{\mu}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n p_n + \frac{7}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{\mu}\left(E[Q] + \frac{7}{3}\right) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{12\lambda}{3\mu - 7\lambda} + \frac{7}{3}\right)$$

$$= \frac{21\mu - 13\lambda}{3\mu(3\mu - 7\lambda)}.$$

Θέμα 3:

Συμβολίζουμε με 0 την κατάσταση του κενού συστήματος και με (n,i), $n=1,2,3$ και $i=1,2$ τις καταστάσεις όπου υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα και ο πελάτης που εξυπηρετείται βρίσκεται στην i φάση της εξυπηρέτησής του. Το διάγραμμα είναι



Θέμα 4:

Οι καταστάσεις που απαιτούνται για μια Μαρκοβιανή περιγραφή του συστήματος είναι 4:

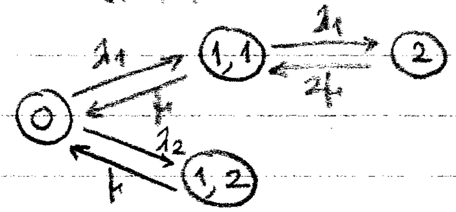
0 : κενό σύστημα

(1,1): ένας πελάτης τύπου 1

(1,2): ένας πελάτης τύπου 2

2 : δυο πελάτες (που θα είναι αναγκαστικά τύπου 1 και οι δυο)

Το διάγραμμα θα είναι



Το μακροπρόθεσμο ποσοστό χαμένων πελατών τύπου 1 ισούται με την πιθανότητα ένας πελάτης τύπου 1 κατά την άφιξή του να μην χωράει να μπει, δηλαδή να βρει το σύστημα σε κάποια από τις καταστάσεις (1,2) ή 2. Επειδή οι πελάτες τύπου 1 φθάνουν σύμφωνα με διαδικασία Poisson, από την ιδιότητα PASTA οι πιθανότητες σε στιγμές αφίξεων πελατών τύπου 1 συμπίπτουν με τις αντίστοιχες στάσιμες πιθανότητες.

Άρα

$$\text{Μακροπροθ. ποσοστό χαμένων πελατών τύπου 1} = P_{(1,2)} + P_2$$

Όμοια

$$\text{Μακροπροθ. ποσοστό χαμένων πελατών τύπου 2} = P_{(1,1)} + P_{(1,2)} + P_2 = 1 - P_0.$$

Όμως η Μ.α.σ.χ είναι προφανώς αντιστρέψιμη (ως γέννησης-θανάτου) και είναι

$$P_{1,2} = \frac{\lambda_2}{\mu} P_0, \quad P_{1,1} = \frac{\lambda_1}{\mu} P_0, \quad P_2 = \frac{\lambda_1^2}{2\mu^2} P_0$$

και το P_0 βρίσκεται από την εξίσωση κανονικοποίησης

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda_2}{\mu} + \frac{\lambda_1}{\mu} + \frac{\lambda_1^2}{2\mu^2}\right)^{-1} = \frac{2\mu^2}{2\mu^2 + 2\mu\lambda_2 + 2\mu\lambda_1 + \lambda_1^2}$$