ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ – ΙΟΥΛΙΟΣ 2007

Θέμα 1^o: Θεωρούμε την τροποποίηση της M/M/2 ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, όπου ορισμένοι πελάτες αποχωρούν από το σύστημα αμέσως μόλις αφιχθούν χωρίς να εξυπηρετηθούν (αποθαρρυνόμενοι πελάτες). Συγκεκριμένα, κάθε πελάτης που βρίσκει έναν τουλάχιστον κενό υπηρέτη κατά την άφιξή του, εισέρχεται σε αυτό σίγουρα, ενώ όταν βρει n άλλα άτομα στο σύστημα με $n \geq 2$ αναχωρεί άμεσα με πιθανότητα $\frac{n-1}{n}$.

(α) Πότε το σύστημα είναι ευσταθές (στάσιμο); Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών στο σύστημα $\{Q(t)\}$, όταν είναι ευσταθές.

(β) Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό των πελατών που εξυπηρετούνται και οι οριακές κατανομές (r_n) και (d_n) των εμφυτευμένων διαδικασιών $\{Q_n^-\}$ και $\{Q_n^+\}$ του αριθμού των πελατών σε στιγμές πραγματικών αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα (δηλαδή λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τους πελάτες που εισέρχονται τελικά στο σύστημα).

(γ) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S]$ ενός πελάτη στο σύστημα, λαμβάνοντας υπόψιν όλους τους πελάτες (είτε εισέρχονται στο σύστημα είτε όχι). Να βρεθεί ο μέσος κύκλος απασχόλησης του συστήματος.

Θέμα 2^o: Θεωρούμε την M/M/1 ουρά με ομαδικές αφίξεις και ομαδικές εξυπηρετήσεις ($M^c/M^c/1$ ουρά). Ο ρυθμός αφίξεων είναι λ και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παράμετρο μ. Κάθε αφικνούμενη ομάδα αποτελείται από 3 πελάτες ενώ οι πελάτες εξυπηρετούνται σε ομάδες των 2 πελατών. Έστω $\{Q(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών .

(α) Να αιτιολογήσετε γιατί η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, κάνοντας πίνακα των άμεσα δυνατών μεταβάσεων και των αντίστοιχων χρόνων.

(β) Να διατυπώσετε μια συνθήκη ευστάθειας για το σύστημα, δικαιολογώντας τη διαισθητικά.

(γ) Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$ (για να απαλείψετε τυχόν άγνωστες παραμέτρους μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το πόρισμα του Θ. Rouché αφού το διατυπώσετε).

Θέμα 3^o: Θεωρούμε ένα δίκτυο Jackson με $N+2$ ουρές. Η ουρά 1 έχει εξωτερικές αφίξεις σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, ενώ οι ουρές $2,3,\ldots,N+2$ δεν έχουν εξωτερικές αφίξεις. Οι αναχωρήσεις από την ουρά 1 κατευθύνονται προς την ουρά i με πιθανότητα $1/N$ για $i=2,3,\ldots,N+1$. Οι αναχωρήσεις από μια ουρά i, $i=2,3,\ldots,N+1$, κατευθύνονται στην ουρά $N+2$ με πιθανότητα 1. Οι αναχωρήσεις από την ουρά $N+2$ φεύγουν από το δίκτυο με πιθανότητα q ή κατευθύνονται στην ουρά 1 με πιθανότητα p $(p+q=1)$. Οι ουρές 1 και $N+2$ έχουν άπειρους υπηρέτες ενώ οι ουρές $2,3,\ldots,N+1$ από έναν υπηρέτη η καθεμιά και άπειρο χώρο αναμονής. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παράμετρο μ για όλες τις ουρές του δικτύου.

(α) Να διατυπωθεί η συνθήκη ευστάθειας του δικτύου.

(β) Να βρεθεί ο στάσιμος μέσος αριθμός πελατών στο δίκτυο.

(γ) Να βρεθεί η στάσιμη πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένας πελάτης σε κάθε σταθμό του δικτύου.

(δ) Να βρεθεί ο στάσιμος μέσος χρόνος συνολικής εξυπηρέτησης που λαμβάνει ένας πελάτης στην ουρά 2 κατά τη διάρκεια μιας διέλευσής του από το δίκτυο.

Διάρκεια εξέτασης : 2 ώρες και 30 λεπτά. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

Να γραφούν και τα 3 θέματα