ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ – ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2005

Θέμα 1ο: Θεωρούμε μια απλή Μαρκοβιανή ουρά με χώρο καταστάσεων $\{0,1,2,...,N\}$ και ρυθμούς αφίξεων και αναχωρήσεων

$$\lambda_n = \left(1-\tfrac{n}{N}\right)\lambda, \quad n = 0,1,2,...,N-1,$$
$$\mu_n = n\mu, \quad n = 1,2,3,...,N,$$

αντίστοιχα, όπου $\lambda, \mu > 0$.

(α) Να γίνει το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης για τη Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα και να βρεθεί η στάσιμη κατανομή της (p_n). Τι είδους κατανομή είναι;

(β) Να βρεθούν οι οριακές κατανομές (r_n) και (d_n) των εμφυτευμένων διαδικασιών $\{Q_n^-\}$ και $\{Q_n^+\}$ του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα. Τι είδους κατανομές είναι;

(γ) Να βρεθεί η μέση τιμή $E[Q]$ και η διασπορά $Var[Q]$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα.

(δ) Να βρεθούν ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S]$ ενός πελάτη στο σύστημα και ο μέσος χρόνος συνεχούς λειτουργίας του συστήματος $E[Y]$.

Θέμα 2ο: Θεωρούμε την M/M/1 ουρά με ομαδικές αφίξεις και ομαδικές εξυπηρετήσεις με ρυθμό αφίξεων ομάδων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης ομάδων μ. Κάθε αφικνούμενη ομάδα αποτελείται από 3 πελάτες. Ο υπηρέτης κάθε φορά που είναι ελεύθερος, επιλέγει 2 πελάτες από τους παρόντες και τους εξυπηρετεί ταυτόχρονα σε χρόνο που έχει την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ. Στην περίπτωση που στο σύστημα δεν υπάρχουν τουλάχιστον 2 πελάτες, ο υπηρέτης περιμένει μέχρι να υπάρξουν 2 πελάτες για να αρχίσει να εξυπηρετεί. Έστω $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ η πιθανογεννήτρια της στάσιμης κατανομής του αριθμού των πελατών στο σύστημα $Q(t)$.

(α) Να αιτιολογήσετε γιατί η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, κάνοντας πίνακα των άμεσα δυνατών μεταβάσεων και των αντίστοιχων χρόνων και να κατασκευάσετε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασής της.

(β) Να βρεθεί η συνθήκη ευστάθειας (στασιμότητας) του συστήματος και να προσδιοριστεί η $P(z)$.

Θέμα 3ο: (I) Να μοντελοποιηθεί ως Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου η $E_2/M/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. (Περιγράψτε τις καταστάσεις, κάνετα πίνακα των άμεσα δυνατών μεταβάσεων και των αντίστοιχων χρόνων καθώς και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης).

(II) Να μοντελοποιηθεί η $M/M/2/N$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ετερογενείς υπηρέτες, όπου ο υπηρέτης υ_i (i=1,2) έχει χρόνους εξυπηρέτησης που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ_i. Υποθέτουμε ότι ένας πελάτης που βρίσκει το σύστημα κενό επιλέγει σε ποιον από τους υ_1, υ_2 θα εξυπηρετηθεί με πιθανότητες p, q αντίστοιχα ($p, q \geq 0$ και $p+q=1$). Να διατυπωθεί μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η αντίστοιχη Μαρκοβιανή αλυσίδα αντιστρέψιμη και στην περίπτωση αυτή να βρεθεί η στάσιμη κατανομή της.

Θέμα 4ο: Θεωρούμε ένα δίκτυο Jackson με $N+1$ σταθμούς εξυπηρέτησης $1,2,...,N+1$. Ο σταθμός $N+1$ έχει άπειρους υπηρέτες ενώ οι σταθμοί $1,2,...,N$ έχουν από έναν υπηρέτη ο καθένας. Οι χρόνοι εξυπηρέτησεις είναι εκθετικοί με παράμετρο μ για όλους τους σταθμούς. Μόνο οι σταθμοί 1 και $N+1$ έχουν εξωτερικές αφίξεις με ρυθμούς λ και λ' αντίστοιχα. Οι αναχωρήσεις από το σταθμό i κατευθύνονται προς το σταθμό $i+1$ με πιθανότητα 1 για κάθε $i = 1,2,...,N-1$. Οι αναχωρήσεις από το σταθμό N κατευθύνονται προς το σταθμό $N+1$ με πιθανότητα p ή επιστρέφουν στο σταθμό 1 με πιθανότητα $q = 1-p$. Οι αναχωρήσεις από το σταθμό $N+1$ αναχωρούν από το δίκτυο.

(α) Να βρεθεί η συνθήκη ευστάθειας του δικτύου και στην περίπτωση αυτή ο μέσος αριθμός πελατών σε κάθε σταθμό του δικτύου.

(β) Να βρεθεί ο μέσος αριθμός φορών που διέρχεται απο το σταθμό N ένας πελάτης του δικτύου.

(γ) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο δίκτυο.

Να γραφούν και τα 4 θέματα. **Διάρκεια : 2 ώρες και 45 λεπτά.** **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**