

Ουρές Αναμονής - 2^η δέσμη ασκήσεων

1. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με παραμέτρους $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ αντίστοιχα. Να βρεθούν :
 - a. η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ (Ερμηνεύστε!)
 - b. η πιθανότητα $P[X_1 > t + s | X_1 > s]$
 - c. οι πιθανότητες $P[X_1 = \min(X_1, X_2)]$ και $P[X_2 = \min(X_1, X_2)]$.
2. Θεωρήστε την $M/M/c$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ . Έστω ότι ένας πελάτης βρίσκει $n > c$ πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξη του. Να προσδιοριστούν :
 - a. η κατανομή του χρόνου μέχρι την επόμενη αναχώρηση πελάτη από το σύστημα
 - b. η κατανομή του χρόνου παραμονής του πελάτη στο σύστημα.
3. Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/c/c$ ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ , όπου ορισμένοι πελάτες αποχωρούν από το σύστημα αμέσως μόλις αφιχθούν χωρίς να εξυπηρετηθούν (αποθαρρυνόμενοι πελάτες). Συγκεκριμένα, κάθε πελάτης που βρίσκει n άλλα άτομα στο σύστημα κατά την άφιξή του αναχωρεί με πιθανότητα $\frac{n}{c}$, $n = 0, 1, 2, \dots, c$. Να γίνει το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασης.
4. Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με ρυθμό αφίξεων λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ , όπου κάθε πελάτης που συμπληρώνει την εξυπηρέτησή του δεν μένει ικανοποιημένος από αυτή με πιθανότητα q ($0 < q < 1$) και την επαναλαμβάνει ευθύς αμέσως κ.ο.κ. Διαδοχικές επαναλήψεις έχουν ανεξάρτητες χρονικές διάρκειες. Να γίνει το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασης.
5. Θεωρούμε μια μηχανή η οποία εξυπηρετεί εργασίες σύμφωνα με τη σειρά άφιξής τους (FCFS). Λόγω υψηλών λειτουργικών εξόδων, η μηχανή απενεργοποιείται μόλις το σύστημα αδειάσει. Όταν μια νέα εργασία αφιχνεται το μηχάνημα τίθεται εκ νέου σε λειτουργία, αλλά χρειάζεται κάποιο χρόνο προθέρμανσης. Υποθέτουμε ότι οι εργασίες φτάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μια Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παράμετρο μ . Ο χρόνος προθέρμανσης της μηχανής είναι επίσης εκθετικός με παράμετρο θ . Θα αναφέρουμε το παραπάνω σύστημα ως $M/M/1/k$ ουρά με χρόνους εκκίνησης, όταν η χωρητικότητα του συστήματος είναι k . Να γίνει το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασης για $k = 1$ και $k = \infty$ ($M/M/1/1$ και $M/M/1$ ουρές με χρόνους εκκίνησης.)