Μαρκοβιανές ουρές και Πιθανογεννήτριες - Άσκηση 2

Θεωρούμε τη $M/M/1$ ουρά με ομαδικές αφίξεις και μεμονωμένες εξυπηρετήσεις ($M^c/M/1$). Ο ρυθμός αφίξεων είναι λ, ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ και κάθε αφικνούμενη ομάδα αποτελείται πάντα από 2 πελάτες. Έστω $\{Q(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών.

α. Να αιτιολογήσετε γιατί η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και να κάνετε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασής της.

β. Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$ συναρτήσει των λ, μ και p_0.

γ. Να βρεθεί η συνθήκη ευστάθειας του συστήματος και να υπολογιστεί η p_0.

δ. Να βρεθεί συναρτήσει των πιθανοτήτων (p_n) η πιθανότητα ένας πελάτης αμέσως μετά την άφιξή του να καταλάβει την $n-$οστή θέση (να έχει μπροστά του $n-1$ πελάτες).

ε. Για $\lambda = 1$ και $\mu = 6$ να βρείτε έναν γενικό τύπο για την (p_n).

Λύση:

Θεωρούμε $\{Q(t),\, t \geq 0\}$ την στοχαστική διαδικασία που μετράει το πλήθος των πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t, $t \geq 0$. Ο χώρος καταστάσεων είναι το $\mathbb{N}_0$. Θα αποδείξουμε ότι η $Q(t)$ διαθέτει την Μαρκοβιανή ιδιότητα.

Παρατηρούμε πως από κάθε κατάσταση n μεταβαίνουμε στη κατάσταση $n+2$ μόνο μετά από άφιξη μιας διμελούς ομάδας νέων πελατών στο σύστημα. Ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει η άφιξη της διμελούς ομάδας πελατών είναι εκθετικός με ρυθμό λ. Άρα ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει η μετάβαση από την κατάσταση n στην $n+2$ είναι εκθετικός με παράμετρο λ. Επίσης από μια κατάσταση n μπορούμε να πάμε στην $n-1$ με την αναχώρηση ενός πελάτη. Ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει η μετάβαση είναι εκθετικός με παράμετρο μ.

Καταστάσεις	Χρόνος Μετάβασης
$n \to n+2,\, n \geq 0$	$Exp(\lambda)$
$n \to n-1,\, n \geq 1$	$Exp(\mu)$

Συνεπώς η $Q(t)$ διαθέτει την Μαρκοβιανή ιδιότητα. Στη συνέχεια δίνεται το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

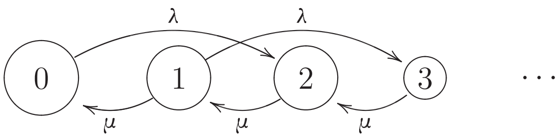

Figure 1: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

Οι εξισώσεις ισορροπίας για την στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα, της παραπάνω $M^c/M/1$ ουράς, είναι

$$\begin{aligned} \lambda p_0 &= \mu p_1 &(1)\\ (\lambda+\mu)p_1 &= \mu p_2 &(2)\\ (\lambda+\mu)p_n &= \lambda p_{n-2} + \mu p_n,\ n \geq 2. &(3) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (2) με z και την εξίσωση (3) με z^n, οπότε το σύστημα των εξισώσεων διορφώνεται ως εξής

$$\begin{aligned} \lambda p_0 &= \mu p_1 &(4)\\ (\lambda+\mu)p_1 z &= \mu p_2 z &(5)\\ (\lambda+\mu)p_n z^n &= \lambda p_{n-2} z^n + \mu p_{n+1} z^n,\ n \geq 2. &(6) \end{aligned}$$

και αθροίζουμε τις εξισώσεις (4)-(6). Το αποτέλεσμα που θα πάρουμε είναι

$$\lambda p_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda+\mu)p_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty}\lambda p_{n-2} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\mu p_{n+1} z^n. \tag{7}$$

Θεωρούμε την πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ και η σχέση (7) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned}
\lambda p_0 + (\lambda+\mu)(\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n - p_0) &= \lambda z^2 \sum_{n=2}^{\infty} p_{n-2} z^{n-2} + \frac{\mu}{z}\sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} z^{n+1} \\
\lambda p_0 + (\lambda+\mu)(P(z) - p_0) &= \lambda z^2 \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n + \frac{\mu}{z}\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \\
(\lambda+\mu)P(z) - \mu p_0 &= \lambda z^2 P(z) + \frac{\mu}{z}(\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n - p_0) \\
(\lambda+\mu)P(z) - \mu p_0 &= \lambda z^2 P(z) + \frac{\mu}{z}(P(z) - p_0) \\
(\lambda+\mu)zP(z) - \mu z p_0 &= \lambda z^3 P(z) + \mu(P(z) - p_0) \quad \Rightarrow \\
\left((\lambda+\mu)z - \lambda z^3 - \mu\right) P(z) &= \mu z p_0 - \mu p_0 \\
\left((\lambda+\mu)z - \lambda z^3 - \mu\right) P(z) &= \mu p_0 (z-1). \qquad (8)
\end{aligned}$$

Το πολυώνυμο $(\lambda+\mu)z - \lambda z^3 - \mu$ είναι 3ου βαθμού και άρα έχει τρεις ρίζες μια εκ των οποίων είναι η μονάδα. Δείχνεται εύκολα ότι $(\lambda+\mu)z - \lambda z^3 - \mu = (z-1)(-\lambda z^2 - \lambda z + \mu)$ και άρα

$$P(z) = \frac{\mu p_0}{-\lambda z^2 - \lambda z + \mu}. \qquad (9)$$

Για να είναι το σύστημα ευσταθές θα πρέπει ο ρυθμός αφίξεων να είναι μικρότερος από τον μέγιστο ρυθμό εξυπηρετήσεων που παρέχει το σύστημα, δηλαδή $2\lambda < \mu$.

Ο προσδιορισμός της πιθανότητας κενού συστήματος, p_0, θα γίνει με χρήση της εξίσωσης κανονικοποίησης που έχει την μορφή $P(1) = 1$. Θέτοντας $z = 1$ στην σχέση (9) έχουμε ότι

$$\frac{\mu p_0}{-2\lambda + \mu} = 1 \quad \Rightarrow \quad p_0 = \frac{-2\lambda + \mu}{\mu}. \qquad (10)$$

Το σύστημα είναι ευσταθές ανν $p_0 > 0$, ισοδύναμα ανν $2\lambda < \mu$.
Η πιθανότητα ένας πελάτης αμέσως μετά την άφιξη του να καταλάβει την n-οστή θέση μπορεί να βρεθεί αν αναλογιστούμε πως αυτό είναι δυνατό σε μόνο δυο περιπτώσεις: είτε ο πελάτης κατά την άφιξη του θα βρεί $n-1$ πελάτες στο σύστημα και αυτός θα είναι πρώτος στην ομάδα του, είτε κατά την άφιξη του θα βρεί $n-2$ πελάτες στο σύστημα και αυτός θα είναι δεύτερος στην ομάδα του. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{1}{2} r_{n-1}^{\text{ομάδας}} + \frac{1}{2} r_{n-2}^{\text{ομάδας}}$. Επειδή όμως οι ομάδες έρχονται στο σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson θα έχουμε λόγω ιδιότητας PASTA ότι $r_n^{\text{ομάδας}} = p_n$. Τελικά η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{1}{2}(p_{n-1} + p_{n-2})$.

Τέλος για $\lambda = 1$ και $\mu = 6$ η $P(z)$ παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \frac{4}{-z^2 - z + 6} \\
&= \frac{4}{(z+3)(2-z)} \\
&= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{z+3} + \frac{1}{2-z}\right) \\
&= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) \\
&= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right]. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Από την σχέση (11) έπεται άμεσα ότι

$$
p_n = \frac{4}{15}\left(\frac{-1}{3}\right)^n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}_0
$$

.