## Μαρκοβιανές ουρές και Πιθανογεννήτριες - Άσκηση 1

Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M^c/1$ ουράς (μοντέλου της παραγράφου 4.2 του βιβλίου) με τις ίδιες παραμέτρους, όπου ο υπηρέτης δεν περιμένει για τη συμπλήρωση $r$ πελατών αλλά εξυπηρετεί όταν υπάρχει τουλάχιστον ένας πελάτης στο σύστημα. Αν ένας χρόνος εξυπηρέτησης τελειώσει και υπάρχουν λιγότεροι από $r$ πελάτες στο σύστημα τότε αναχωρούν όλοι, ενώ αν υπάρχουν περισσότεροι από $r$ τότε αναχωρούν ακριβώς $r$.

α. Να γραφούν οι εξισώσεις για τη στάσιμη κατανομή $(p_n)$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα (σε μια τυχαία χρονική στιγμή).

β. Χρησιμοποιώντας ένα βασικό αποτέλεσμα αιτιολογήστε ότι η συνθήκη ευστάθειας είναι $\lambda < r\mu$.

γ. Αποδείξτε ότι στην ευσταθή περίπτωση ($\lambda < r\mu$) η εξίσωση $\mu x^{r+1} - (\lambda + \mu)x + \lambda = 0$ έχει μια ρίζα $r_0 \in (0, 1)$.
(Υπόδειξη: Δείξτε ότι η $f(x) = \mu x^{r+1} - (\lambda + \mu)x + \lambda$ είναι κυρτή με $f(0) > 0,\ f(1) = 0,\ f^{'}(1) > 0$ και συμπεράνετε το αποτέλεσμα)

δ. Στην ευσταθή περίπτωση, η στάσιμη κατανομή $(p_n)$ είναι γεωμετρική με παράμετρο $r_0$ (δηλαδή $p_n = (1 - r_0)r_0^n,\ n = 0, 1, 2, ...$)

Λύση:

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης δίνεται στο σχήμα 1.

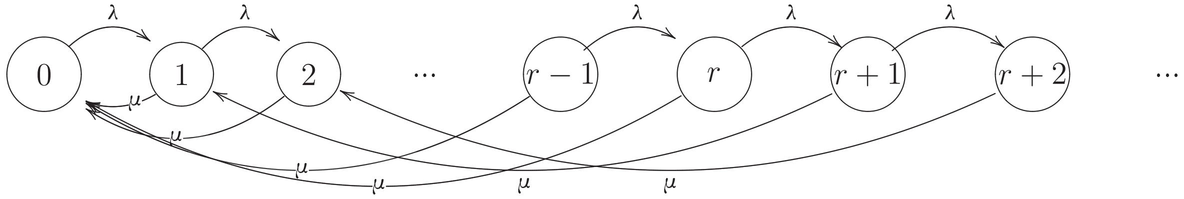


Figure 1: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

Οι εξισώσεις ισορροπίας για την στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα, της παραπάνω $M/M^c/1$ ουράς, είναι

$$\lambda p_0 = \mu p_1 + \mu p_2 + \mu p_3 + \cdots \mu p_r \tag{1}$$

$$(\lambda + \mu) p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+r},\ n \geq 1. \tag{2}$$

Στο σύστημα εξυπηρετούνται ταυτόχρονα το πολύ $r$ πελάτες. Για να είναι ευσταθές θα πρέπει ο ρυθμός αφίξεων να είναι μικρότερος από τον μέγιστο ρυθμό εξυπηρετήσεων που παρέχει το σύστημα, δηλαδή $\lambda < r\mu$. Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως ο ρυθμός συνωστισμού θα πρέπει να είναι μικρότερος από την μέγιστή δυνατότητα για εξυπηρέτηση ώστε να εξασφαλίζεται η ευστάθεια του συστήματος.

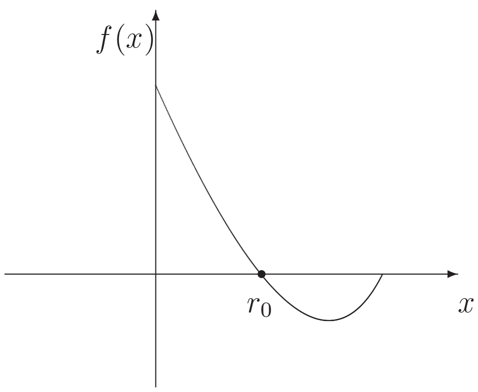


Figure 2: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$

Θα μελετήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \mu x^{r+1} - (\lambda + \mu)x + \lambda$. Παρατηρούμε πως

$$f(0) = \lambda \quad \text{και} \quad f(1) = 0 \tag{3}$$

επίσης

$$f'(x) = (r+1)\mu x^r - (\lambda + \mu) \quad \text{και} \quad f''(x) = (r+1)r\mu x^{r-1} \geq 0,\ \forall x \geq 0. \tag{4}$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) και από την υπόθεση για την ευστάθεια του συστήματος έπεται ότι $f'(1) = (r+1)\mu - (\lambda + \mu) > 0$. Επιπλέον η συνάρτηση $f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα $[0,1]$, εφόσον $f''(x) \geq 0$, $x \geq 0$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Bolzano και Rolle έχουμε εύκολα ότι η συνάρτηση $f(x)$ έχει μοναδική ρίζα, έστω $r_0$, στο $(0,1)$, δηλαδή $\exists r_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\mu r_0^{r+1} - (\lambda + \mu) r_0 + \lambda = 0$. Παρατηρούμε ότι η λύση $p_n = (1 - r_0) r_0^n$ ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας (1)-(2), και άρα δίνει τη στάσιμη κατανομή του συστήματος.