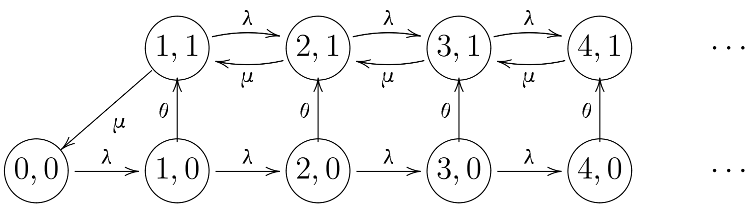
**Βασικά αποτελέσματα - Άσκηση 6**

Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης το οποίο διαθέτει έναν υπηρέτη και άπειρη χωρητικότητα. Η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με παράμετρο $\lambda$ ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παράμετρο $\mu$. Κάθε φορά που το σύστημα αδειάζει ο υπηρέτης απενεργοποιείται. Με την άφιξη ενός πελάτη σε κενό σύστημα, ο υπηρέτης μπαίνει σε διαδικασία ενεργοποίησης. Ο χρόνος που χρειάζεται μέχρι να ενεργοποιηθεί (οπότε να αρχίσει να εξυπηρετεί κανονικά) ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με ρυθμό $\theta$. Κατά τη διάρκεια του χρόνου αυτού οι αφίξεις συνεχίζονται κανονικά. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Little και την ιδιότητα PASTA, να βρεθεί ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα και ο μέσος χρόνος παραμονής τους σε αυτό.

Λύση:

Έστω $Q(t)$ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα τη στιγμή $t$ και $I(t)$ η κατάσταση του υπηρέτη τη στιγμή $t$, όπου $I(t)$=0 ή 1 (0:απενεργοποιημένος, 1:ενεργοποιημένος). Τότε η $\{(Q(t), I(t)),\ t \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων $S = \{(n,i),\ i = 0,1,\ n = i, i+1, \ldots\}$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης




Αρχικά θα υπολογίσουμε την πιθανότητα ο υπηρέτης να είναι απενεργοποιημένος ή ενεργός, $\pi_0$ και $\pi_1$ αντίστοιχα. Έστω $Q_s$ το πλήθος των πελατών που βρίσκονται στο χώρο εξυπηρέτησης και $X$ ο χρόνος εξυπηρέτησης. Έχουμε

$$Q_s = \begin{cases} 1, & \text{αν ο υπηρέτης είναι ενεργός} \\ 0, & \text{αν ο υπηρέτης είναι απενεργοποιημένος} \end{cases}$$

οπότε $E[Q_s] = 0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1 = \pi_1$. Επιπλέον $E[X] = \frac{1}{\mu}$. Αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Little στο χώρο εξυπηρέτησης και θέσουμε $\rho$ το ρυθμό συνωστισμού $\frac{\lambda}{\mu}$ παίρνουμε

$$E[Q_s] = \lambda E[X] \Rightarrow \pi_1 = \rho.$$

Αλλά $\pi_0 + \pi_1 = 1$ οπότε

$$\pi_0 = 1 - \rho.$$

Έστω τώρα $Q$ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα και $S$ ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα. Λόγω της ιδιότητας PASTA το μέσο πλήθος πελατών που βλέπει ένας πελάτης κατά την άφιξή του είναι ίσο με $E[Q]$. Ένας πελάτης ο οποίος κατά την άφιξή του βρίσκει τον υπηρέτη ενεργοποιημένο θα πρέπει να περιμένει να εξυπηρετηθούν όσοι είναι πριν από αυτόν και ο ίδιος. Αν όμως κατά την άφιξή του ο υπηρέτης είναι απενεργοποιημένος θα πρέπει επιπλέον να περιμένει μέχρι την ενεργοποίηση του υπηρέτη (υπολειπόμενο χρόνο ενεργοποίησης). Έτσι έχουμε

$$E[S] = \pi_0 \frac{1}{\theta} + (E[Q]+1)\frac{1}{\mu} = (1-\rho)\frac{1}{\theta} + (E[Q]+1)\frac{1}{\mu} \tag{1}$$

Επιπλέον από το Θεώρημα του Little για το συνολικό σύστημα έχουμε

$$E[Q] = \lambda E[S]. \tag{2}$$

Με επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει ότι

$$E[S] = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\mu(1-\rho)} \qquad \text{και} \qquad E[Q] = \frac{\lambda}{\theta} + \frac{\rho}{1-\rho}.$$