

Βασικά αποτελέσματα - Άσκηση 3

Θεωρήστε μια $M/M/c$ ουρά με ρυθμό αφίξεων 5 πελάτες την ώρα και μέσο χρόνο εξυπηρέτησης ανά πελάτη 78 λεπτά.

- α. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός υπηρετών c που χρειάζεται για να είναι το σύστημα ευσταθές (δηλαδή να μην απειρίζεται το πλήθος των πελατών στο σύστημα);
- β. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός υπηρετών που χρειάζεται αν η εργατική νομοθεσία επιβάλλει κάθε υπηρέτης να είναι απασχολημένος το πολύ το 80% του χρόνου του;

Λύση:

Αρχικά, ο ρυθμός αφίξεων και ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης πρέπει να εκφραστούν χρησιμοποιώντας την ίδια χρονική μονάδα (π.χ. και οι δύο σε ώρες ή και οι δύο σε λεπτά). Αν διαλέξουμε ως χρονική μονάδα την ώρα τότε ο ρυθμός αφίξεων είναι $\lambda = 5$ πελάτες/ώρα και ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης b είναι $78/60$ ώρες. Ο ρυθμός συνωστισμού είναι $\rho = \lambda b = 5 \frac{78}{60} = 6.5$. Στο ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε καταλήξει αν χρησιμοποιούσαμε το λεπτό ως χρονική μονάδα οπότε θα είχαμε $\lambda = 5/60$ πελάτες/λεπτό και ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης θα ήταν $b = 78$ λεπτά.

- α. Για να είναι το σύστημα ευσταθές θα πρέπει ο ρυθμός συνωστισμού να είναι μικρότερος από το πλήθος των υπηρετών, δηλαδή $\rho < c$. Η μικρότερη ακέραια τιμή για την οποία ισχύει αυτή η σχέση είναι $c = 7$.
- β. Το ποσοστό χρόνου που είναι απασχολημένος κάθε υπηρέτης είναι $\frac{\rho}{c}$. Θέλουμε αυτό το ποσοστό να μην ξεπερνάει το 80%, δηλαδή

$$\frac{\rho}{c} \leq 0.8 \Leftrightarrow c \geq \frac{\rho}{0.8} \Leftrightarrow c \geq 8.125.$$

Έτσι το ελάχιστο πλήθος υπηρετών είναι στην περίπτωση αυτή $c = 9$.