Άσκηση 1: Μηχάνημα για 5 χρόνια

Τώρα (αρχή έτους 1) το μηχάνημα είναι ενός έτους

Το μηχάνημα δεν μπορεί να λειτουργήσει πάνω από 3 χρόνια

Κόστος νέου μηχανήματος: 10000€ = T

x Ηλικία	$R(x)$ Έσοδα	$c(x)$ Κόστος συντήρησης	$p(x)$ Αξία μεταπώλησης
0	9000	1000	-
1	6000	1400	6000
2	3000	2000	3600
3	-	-	1000

→ Όλα μετριούνται στην αρχή του έτους.

Δεν έχει νόημα να το πουλήσω μόλις το αγοράσω.

Δεν μπορώ να το κρατήσω άλλο. Πρέπει να το πουλήσω

Μεγιστοποίηση καθαρού κέρδους στην 5ετία (υποθέτω ότι στο τέλος του 5ου έτους πουλάω το μηχάνημα). Είναι πρόβλημα συντήρησης μηχανήματος

Μοντελοποίηση σε Π.Δ.Π:

1) Βήματα: έτη $t=1,2,\dots,6$ (ορίζοντας $N=5$)

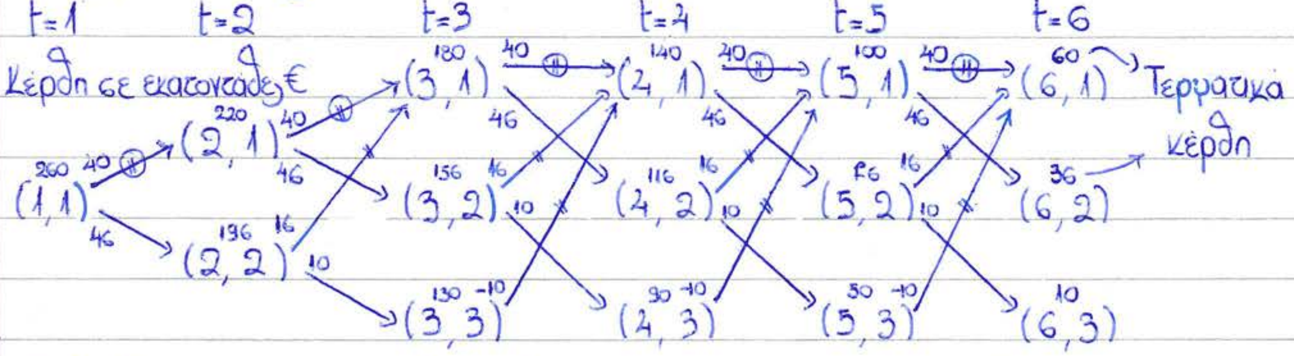
2) Κατάσταση: x_t = ηλικία του μηχανήματος στην αρχή του χρόνου t

3) Απόφαση: $a_t = \begin{cases} 1, & \text{αντικατάσταση} \\ 2, & \text{συντήρηση} \end{cases}$

4) Κέρδος ενός βήματος: $r(x_t,a_t) = \begin{cases} p(x_t) - T + R(0) - c(0), & a_t=1 \\ R(x_t) - c(x_t), & a_t=2 \end{cases}$

5) Δυναμική: $x_{t+1} = \begin{cases} 1, & a_t=1 \\ x_t+1, & a_t=2 \end{cases}$

6) Τερματικό κέρδος: $\hat{r}(x_6) = p(x_6)$



$r(1,1) = 60-100+90-10 = 40$, $r(1,2) = 60-14 = 46$, $r(2,1) = 36-100+90-10 = 16$,

$r(2,2) = 30-20 = 10$, $r(3,1) = 10-100+90-10 = -10$.

Πρέπει να γράψω και τη συνάρτηση βελτιστότητας: $u(t,x_t) = \max_{a_t \in D_t(x_t)} \{ r(x_t,a_t) + u(t+1,x_{t+1}) \}$,

$\upsilon(6,x_6)=\hat{c}(x_6) \Rightarrow \upsilon(6,1)=60,\ \upsilon(6,2)=36,\ \upsilon(6,3)=10 \Rightarrow \upsilon(5,1)=\max\{40+\upsilon(6,1), 46+\upsilon(6,2)\}=$
$=\min\{40+60, 46+36\}=100,\ \upsilon(5,2)=\max\{16+\upsilon(6,1), 10+\upsilon(6,3)\}=76,\ \upsilon(5,3)=-10+\upsilon(6,1)=50 \ldots$

Άρα μέγιστο κέρδος 26000€ με βέλτιση διαδρομή να αλλάζω το μηχάνημα κάθε χρόνο

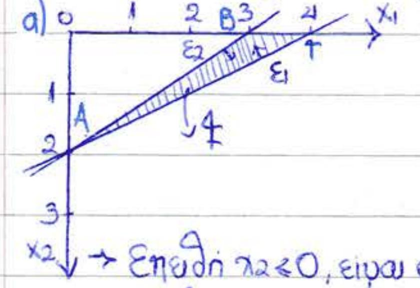
Άσκηση 2: $\min(5x_1+2x_2)$

$x_1-2x_2 \le 4$ α) Γεωμετρική επίλυση

$2x_1-3x_2 \ge 6$ β) Simplex

$x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0$ γ) Δυϊκό πρβ

α)



(ε_1): $x_1-2x_2=4$ με σημεία τομής $(4,0),(0,-2)$

(ε_2): $2x_1-3x_2=6$ με σημεία τομής $(3,0),(0,-2)$

$z_A=5\cdot 0+2(-2)=\underline{-4}$, $z_B=5\cdot 3+2\cdot 0=15$

$z_\Gamma=5\cdot 4+2\cdot 0=20$ → ελαχιστοποίηση, άρα άριστη τιμή -4

→ Επειδή $x_2 \le 0$, είμαι στο 4ο τεταρτημόριο!! με άριστη λύση $x^*=(0,-2)^t$

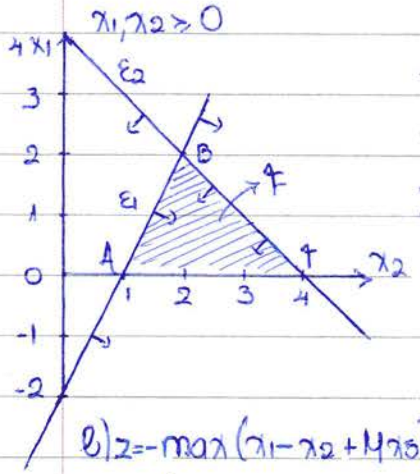
β) Στη μέθοδο Simplex εμφανίζονται εκφυλισμένες λύσεις, επειδή στο σημείο Α τέμνονται 3 ευθείες. Δεν θα μας ζητηθεί κάτι τέτοιο στις εξετάσεις με βάση αυτά που έχουμε κάνει φέτος!

Άσκηση 3: $\min(-x_1+x_2)$

$x_1-\frac{1}{2}x_2 \ge 1$ → (ε_1): $x_1-\frac{1}{2}x_2=1$ με σημεία τομής $(1,0),(0,-2)$

$x_1+x_2 \le 4$ → (ε_2): $x_1+x_2=4$ με σημεία τομής $(4,0),(0,4)$

$x_1,x_2 \ge 0$



$z_A=-1+0=-1$

$z_B=-2+2=0$, αφού σημείο τομής των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι το $(2,2)$

$z_\Gamma=-4+0=-4$

Άρα $z^*=-4$ με $x^*=(4,0)^t$

β) $z=-\max(x_1-x_2+Mx_5)$, $M<<0\ (M\to -\infty)$

$$\left.\begin{aligned} &x_1-\frac{1}{2}x_2-x_3+x_5=1 \\ &x_1+x_2+x_4=4 \\ &x_i \ge 0,\ i=1,2,\ldots,5 \end{aligned}\right\}$$

Το φέραμε σε κανονική μορφή

Για να εμφανιστεί ο μοναδιαίος χρειαστήκαμε τεχνητή μεταβλητή x_5

Αν η x_5 παραμείνει στη βάση αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα δεν είναι εφικτό!

B	C_B	x_B	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ	
			1	-1	0	0	M		
x_5	M	1	$\boxed{1}$	$-1/2$	-1	0	1	1	
x_4	0	4	1	1	0	1	0	4	
		M	$M-1$	$1-M/2$	$-M$	0	0	z_j-c_j	
x_1	1	1	1	$-1/2$	-1	0	1	$-$	$\Gamma_1'=\Gamma_1$
x_4	0	3	0	$3/2$	$\boxed{1}$	1	-1	4	$\Gamma_2'=\Gamma_2-\Gamma_1$ — Βρισκόμαστε στην κορυφή $A(1,0)$ με $z_A=-1$
		1	0	$1/2$	-1	0	$1-M$		
x_1	1	4	1	1	0	1	0		$\Gamma_1''=\Gamma_1'+\Gamma_2'$
x_3	0	3	0	$3/2$	1	1	-1		$\Gamma_2''=\Gamma_2'$ — Φτάσαμε στην κορυφή $\Gamma(4,0)$
		4	0	2	0	1	$-M$		

Μοναδική βέλτιστη λύση (αφού όλες οι διαφορές z_j-c_j που αντιστοιχούν σε μη-βασικές στήλες είναι γνήσια θετικές) με $x_1^*=4$, $x_2^*=0$ και $z^*=-4$

Συνέχεια προηγούμενης άσκησης: Να βρεθεί το δυϊκό και η άριστη λύση του από την άριστη λύση του Π.

Είδος προβλήματος	min	max
Προβλεπόμενη φορά περιορισμών	$\geq$	$\leq$

Άρα το δυϊκό του Π χρησιμοποιώντας τις προβλεπόμενες φορές είναι το Δ:

$\max(w_1+4w_2)$

$w_1+w_2 \leq -1$

$-\frac{1}{2}w_1+w_2 \leq 1$

Επειδή $x_1, x_2 \geq 0$

προβλεπόμενη φορά $\Leftrightarrow w_i \geq 0$
ισότητα $\Leftrightarrow w_i \in \mathbb{R}$
αντίθετη προβλεπόμενης $\Leftrightarrow w_i \leq 0$

$w_1 \geq 0,\ w_2 \leq 0$ → επειδή πρώτος περιορισμός "≥" και δεύτερος "≤"

Για να βρούμε τη λύση του Δ χρησιμοποιούμε το θεώρημα συμπληρωματικότητας

$x_1^* = 4 > 0 \Rightarrow w_1^* + w_2^* = -1$

$4x_1^* + x_2^* = 4 > 0$ (πρώτος περιορισμός του Π) $\Rightarrow w_1^* = 0$

$\Rightarrow w_2^* = -1$

Άρα $w^* = (0,-1)^t$ με $z^* = 0 + 4(-1) = -4$ (ίση με του Π)

Άσκηση 2: Να γραφεί σε ισοδύναμο π.γ.π το πρόβλημα:

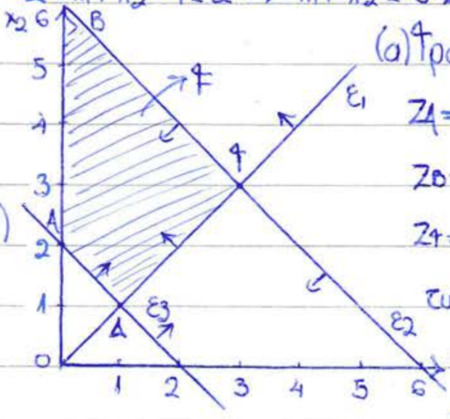
$\max(3x_1+4x_2)$

$x_1 \leq x_2$

$|x_1+x_2-4| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x_1+x_2-4 \leq 2 \Leftrightarrow x_1+x_2 \leq 6$ και $x_1+x_2 \geq 2$. Άρα

$x_1, x_2 \geq 0$

(Π)
$\max(3x_1+4x_2)$
$x_1 - x_2 \leq 0$
$x_1 + x_2 \leq 6$
$x_1 + x_2 \geq 2$
$x_1, x_2 \geq 0$



(α) Γραφική επίλυση

$z_A = 3\cdot 0 + 4\cdot 2 = 8$

$z_B = 3\cdot 0 + 4\cdot 6 = \underline{24}$ → βέλτιστη λύση $x^* = (0,6)^t$

$z_\Gamma = 3\cdot 3 + 4\cdot 3 = 21$, αφού σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι το $(3,3)$

$z_\Delta = 3\cdot 1 + 4\cdot 1 = 7$, αφού σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_3$, είναι το $(1,1)$

(β) Simplex: $\max(3x_1+4x_2+Mx_6)$

$x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$x_1 + x_2 + x_4 = 6$

$x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 2$

$x_i \geq 0,\ i = 1,2,\dots,6$

Κανονική Μορφή

B	c_B	x_B	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
x_3	0	0	1	-1	1	0	0	0	-	
x_4	0	6	1	1	0	1	0	0	6	
x_6	M	2	1	$\boxed{1}$	0	0	-1	1	2	
		$2M$	$M-3$	$M-4$	0	0	$-M$	0		
x_3	0	2	2	0	1	0	-1	1	-	$\gamma_1' = \gamma_1 + \gamma_3$
x_4	0	4	0	0	0	1	$\boxed{1}$	-1	4	$\gamma_2' = \gamma_2 - \gamma_3$
x_2	4	2	1	1	0	0	-1	1	-	$\gamma_3' = \gamma_3$
		8	1	0	0	0	-4	$4-M$		
x_3	0	6	2	0	1	1	0	0		$\gamma_1'' = \gamma_1' + \gamma_2'$
x_5	0	4	0	0	0	1	1	-1		$\gamma_2'' = \gamma_2'$
x_2	4	6	1	1	0	1	0	0		$\gamma_3'' = \gamma_3' + \gamma_2'$
		24	1	0	0	4	0	$-M$		

→ Άριστη λύση $x^* = (0,6,6,0,4)^t$ με $z^* = 24$

(γ) Το αντίστοιχο δυϊκό είναι: $\min(6w_2 + 2w_3)$

$w_1 + w_2 + w_3 \geq 3$

$-w_1 + w_2 + w_3 \geq 4$

$w_1, w_2 \geq 0,\ w_3 \leq 0$

Βέλτιστη λύση δυϊκού:
$$\left.\begin{array}{l} x_2^* = 6 \Rightarrow -w_1^* + w_2^* + w_3^* = 4 \\ x_1^* - x_2^* = -6 < 0 \text{ (πρώτος περιορισμός)} \Rightarrow w_1^* = 0 \\ x_1 + x_2 = 6 > 2 \text{ (τρίτος περιορισμός)} \Rightarrow w_3^* = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow w_2^* = 4$$

Δηλαδή $w^* = (0,4,0)^t$ με $z^* = 6 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 24$