Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 28ο (02-06-2015)

Άσκηση 5.7

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε: $Q_n(t)=a_n\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n$, όπου η a_n επιλέγεται ώστε $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} Q_n(t)\,dt=1$.
Δείξτε ότι $\{Q_n\}$ καλός πυρήνας.
(Αφού Q_n είναι τριγ. πολυώνυμα και $\forall f\in C(\mathbb{T})$ $f*Q_n \xrightarrow{o\mu} f$, αυτό αποδεικνύει ότι τα τριγ. πολ. είναι πυκνά στο $(C(\mathbb{T}),\|\cdot\|_\infty)$).

Λύση

(i) δίνεται $\forall n$ $\frac{1}{2\pi}\int Q_n = 1$

(ii) άμεσο γιατί $Q_n \geq 0 \Rightarrow \forall n$ $\frac{1}{2\pi}\int |Q_n| = \frac{1}{2\pi}\int Q_n = 1 \leq \underset{1}{M}$.

(iii) Παίρνουμε $0<\delta<\pi$ και δείχνουμε ότι

$$\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} Q_n(t)\,dt \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$2a_n\int_\delta^\pi \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n dt \leq 2a_n\int_\delta^\pi \left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n dt \leq$$

$$\leq 2(\pi-\delta)a_n\underbrace{\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)}_{\theta_\delta<1}^n \leq$$

$$\overset{(*)}{\leq} 2\pi a_n \theta_\delta^n$$

$\downarrow$ γρηγορότερα
0

$$\frac{a_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n dt = 1$$
$$\|$$
$$\frac{a_n}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n dt = 1 \qquad a_n\geq 1$$
$$\Downarrow$$
$$a_n = \frac{\pi}{\int_0^\pi \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n dt}$$

Φράγμα για το a_n:
Έχουμε: $I_n = \int_0^\pi \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n dt = \int_0^\pi [\cos(t/2)]^{2n}\,dt \overset{y=\frac{t}{2}}{=}$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} y\,dy \geq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{2}{\pi}y\right)^{2n} dy \overset{z=\frac{2}{\pi}y}{=}$$

$$= \pi\int_0^1 (1-z)^{2n}\,dz = \frac{\pi}{2n+1}$$

Τελικά, $(*) \leq 2\pi(2n+1)\theta_\delta^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ γιατί $\theta_\delta<1$. $\square$

Άσκηση 5.14

Έστω $f\in L_1(\mathbb{T})$.
Αν $A\subseteq \mathbb{T}$ μετρήσιμο, τότε η σειρά $\sum_k \hat{f}(k)\int_A e^{ikt}\,d\lambda(t)$ είναι Cesaro αθροίσιμη στο $\int_A f(t)\,d\lambda(t)$.

Λύση

$c_k = \hat{f}(k)\int_A e^{ikt}\,dt$

$s_m = \sum_{k=-m}^{m} c_k = \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k)\int_A e^{ikt}\,dt = \int_A \underbrace{\Big(\sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k)e^{ikt}\Big)}_{s_m(f,t)}dt$

$\sigma_n = \frac{s_0+s_1+\dots+s_{n-1}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\int_A s_m(f,t)\,dt = \int_A \underbrace{\Big(\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} s_m(f,t)\Big)}_{\sigma_n(f,t)}dt$

Άρα, $\sigma_n = \int_A \sigma_n(f,t)\,dt \underset{;}{\longrightarrow} \int_A f(t)\,dt$.

Έχουμε:

$$\Big|\int_A f(t)\,dt - \int_A \sigma_n(f,t)\,dt\Big| \le \int_A |\sigma_n(f,t)-f(t)|\,dt \le$$

$$\le \int_{\mathbb{T}} |\sigma_n(f,t)-f(t)|\,dt = 2\pi\|\sigma_n(f)-f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Γενικά: αν $f\in L_p(\mathbb{T})$, $p\ge 1$, τότε $\|\sigma_n(f)-f\|_1 \le \|\sigma_n(f)-f\|_p \to 0$ □.

Άσκηση 6.10-11

$\boxed{11}$ Έστω $a>\frac{1}{2}$ και $f\in C(\mathbb{T})$ η οποία ικανοποιεί συνθήκη Hölder τάξεως a:

$$|f(x)-f(y)| \le K|x-y|^a \quad \forall x,y.$$

Δείξτε ότι: $\sum_k |\hat{f}(k)| < \infty$ $\left(\Rightarrow s_n(f) \xrightarrow{\text{ομ}} f\right)$

$\boxed{10}$ (Περίπτωση $a=1$)

Βήμα 1: Για $t>0$, ορίζουμε $g_t(x) = f(x+t)-f(x-t)$.
Τότε, $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g_t(x)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2|\hat{f}(k)|^2 \Rightarrow \sum_k |\sin kt|^2|\hat{f}(k)|^2 \le$

$\le \frac{2^{2a}K^2|t|^{2a}}{4}$

Βήμα 2: Έστω $p \in \mathbb{N}$.

Παίρνοντας $t = \frac{\pi}{2^{p+1}}$ δείξτε ότι:

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\hat{f}(k)|^2 \leq \cancel{\frac{K^2 \pi^2}{2^{2p+1}}} \quad \frac{2^{2a-1} K^2 \pi^{2a}}{2^{(p+1)a}}$$

Βήμα 3: Το ζητούμενο.

(*) Σημείωση:

Εμείς θέλουμε να φράξουμε το $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)| = |\hat{f}(-1)| + |\hat{f}(0)| + |\hat{f}(1)| + \sum_{p=1}^{\infty} \Big(\sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} 1 \cdot |\hat{f}(k)| \Big)$

$$\underset{C-S}{\leq} |\hat{f}(-1)| + |\hat{f}(0)| + |\hat{f}(1)| + \sum_{p=1}^{\infty} \Big(\sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\hat{f}(k)|^2 \Big)^{1/2} \cdot 2^{p/2}$$

Λύση

Βήμα 1: $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g_t(x)|^2 \, dx \overset{\text{Parseval}}{=\!=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{g}_t(k)|^2$ (1)

Υπολογίζουμε το: $\hat{g}_t(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x+t) e^{-ikx} \, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) e^{-ikx} \, dt$

$$= e^{ikt} \hat{f}(k) - e^{-ikt} \hat{f}(k) =$$

$$= 2i \sin(kt) \hat{f}(k)$$

Για $k = 0$ δίνει 0.

$$(1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |2i \sin(kt) \hat{f}(k)|^2 = 4 \sum |\sin(kt)|^2 |\hat{f}(k)|^2$$

Τότε, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 4 |\sin(kt)|^2 |\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(x-t)|^2 \, dx \leq$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K^2 |x+t-(x-t)|^{2a} \, dx$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi} \cdot K^2 |2t|^{2a} = 2^{2a} K^2 |t|^{2a}$$

Άρα $\sum_{k} |\sin(kt)|^2 \cdot |\hat{f}(k)|^2 = \frac{2^{2a} K^2 |t|^{2a}}{4}$

Βήμα 2: Από το Βήμα 1, για $t=\frac{\pi}{2^{p+1}}$ έχουμε:

$$\le \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\sin\left(\frac{\pi k}{2^{p+1}}\right)\right|^2|\hat{f}(k)|^2 \le \frac{2^{2a}k^2\pi^{2a}}{4}\cdot\frac{1}{2^{2(p+1)a}}$$

[Αν $2^{p-1}<k\le 2^p \Rightarrow \frac{\pi}{4}<\frac{\pi k}{2^{p+1}}\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sin\frac{\pi k}{2^{p+1}}>\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$]

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{2^{p-1}<|k|\le 2^p}|\hat{f}(k)|^2 \le \sum_{2^{p-1}<|k|\le 2^p}\left|\sin\left(\frac{\pi k}{2^{p+1}}\right)\right|^2\cdot|\hat{f}(k)|^2\le\right)$$

Άρα, $$\sum_{2^{p-1}<|k|\le 2^p}|\hat{f}(k)|^2 \le \frac{2^{2a-1}k^2\pi^{2a}}{2^{(p+1)a}}$$

Από την ⊛: $$\sum_k|\hat{f}(k)| \le |\hat{f}(-1)|+|\hat{f}(0)|+|\hat{f}(1)|+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2^{a-\frac{1}{2}}k\pi^a}{2^{(p+1)a}}\cdot 2^{p/2}$$

Έχουμε: $$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2^{p/2}}{2^{(p+1)a}}=\frac{1}{2^a}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{a-\frac{1}{2}}}\right)^p<\infty$$ □

Άσκηση 6.5

$f\in C^1(\mathbb{T})$

(α) $\{k\hat{f}(k)\}$ φραγμένη

(β) $|k\hat{f}(k)|\to 0$

(γ) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(k)|<\infty$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\hat{f'}(k)=ik\hat{f}(k)\Rightarrow|k\hat{f}(k)|=|\hat{f'}(k)|$$

(β) f' συνεχής $\Rightarrow f'\in L_2(\mathbb{T})\Rightarrow \|f'\|_2^2\overset{\text{Pars.}}{=}\sum_k|\hat{f'}(k)|^2<\infty$

$\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $|k\hat{f}(k)|\to 0$

(γ) $$\sum_{k\neq 0}|\hat{f}(k)|=\sum_{k\neq 0}\frac{1}{|k|}\underbrace{|k\hat{f}(k)|}_{=\hat{f'}(k)}\underset{C-S}{\le}\Big(\underbrace{\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}}_{\text{συγκλίνει}}\Big)^{1/2}\Big(\underbrace{\sum_{k\neq 0}|\hat{f'}(k)|^2}_{=\|f'\|_2^2}\Big)^{1/2}<\infty$$ □

Σημείωση

Αφού $\sum_k |\hat{f}(k)| < \infty \rightsquigarrow S_n(f) \xrightarrow{\text{ομ.}} f \Rightarrow \|S_n(f) - f\|_\infty \to 0$.

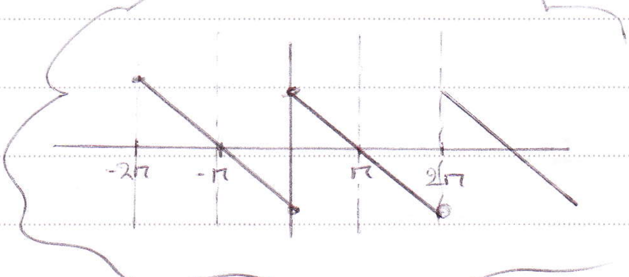
Μάλιστα (άσκ. 4) $\sqrt{n}\, \|S_n(f) - f\|_\infty \to 0$ (αν $f \in C^1(\mathbb{T})$).

Άσκηση 6.12

$f \in C(\mathbb{T})$ και a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f.

Τότε $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{(\pi - x)}_{g} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 b_k}{k}$.

Λύση



$f, g \in L_2(\mathbb{T})$

$$\langle f, g\rangle = \sum_k \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}$$

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

Ομοίως, για f, g πρ. συναρτήσεις:

$$\langle f, g\rangle \overset{(*)}{=} \frac{a_0(f)\, a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\cancel{a_k(f)\, a_k(g)} + b_k(f)\cdot b_k(g)\right).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \pi - x$ στο $(0, 2\pi]$, $g(0) = 0$.

Την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική (περιττή) συνάρτηση στον $L_2(\mathbb{T}) \Rightarrow a_k(g) = 0\ \forall k$.

Άρα, η $(*)$ δίνει $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi - x) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \underline{b_k(g)}$

$$b_k(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin kx\,dx$$

$$= -\left.\frac{2(\pi - x)\cos(kx)}{k\pi}\right|_0^{\pi} = \frac{2(\pi - 0)\cos(k\cdot 0)}{k\pi} = \frac{2}{k}\ \square$$

Άσκηση 6.16 (Ανισότητα του Hilbert).

Έστω $x_n, y_m \in \mathbb{C}$, $n,m \geq 0$.

Δείξτε ότι $\left|\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x_n y_m}{n+m+1}\right| \leq \pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2\right)^{1/2}$

βέλτιστη σταθερά

Υπόδειξη 1

Θεωρούμε την $\varphi : [-\pi,\pi) \to \mathbb{C}$ με $\varphi(t) = i(\pi - t)e^{-it}$ και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά.

Άσκηση: $\hat{\varphi}(k) = \frac{1}{k+1}$, αν $k \geq 0$ και $\|\varphi\|_\infty = \pi$.

Υπόδειξη 2

$$\sum_{n,m=0}^{N} \frac{|x_n|\cdot|y_m|}{n+m+1} = \sum_{n,m=0}^{N} |x_n|\cdot|y_m| \hat{\varphi}(m+n) = \sum_{n,m=0}^{N} |x_n|\cdot|y_m| \frac{1}{2\pi}\int \varphi(t) e^{-imt} e^{-int} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \varphi(t) \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{N} |x_n| e^{-int}\right)}_{F_N} \underbrace{\left(\sum_{m=0}^{N} |y_m| e^{-imt}\right)}_{G_N} dt$$

$$\underset{n}{\leq} \|\varphi\|_\infty \cdot \frac{1}{2\pi}\int |F_N|\cdot|G_N|\, dt \underset{C-S}{\leq} \|\varphi\|_\infty \cdot \|F_N\|_2 \cdot \|G_N\|_2$$

Όμως, $\|F_N\|_2^2 = \sum_{n=0}^{N} |x_n|^2$ και $\|G_N\|_2^2 = \sum_{m=0}^{N} |y_m|^2$. □