Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 26ο (26-05-2015)

Χώροι Hilbert και L_2-σύγκλιση Fourier

(1) X γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C})$.
Εσωτερικό γινόμενο: $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X \longrightarrow \mathbb{C}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\langle x,x\rangle \geq 0$ με ισότητα $\Leftrightarrow x=0$.

(β) $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$, $x,y\in X$.

(γ) $\forall y\in X$ η $x\longmapsto \langle x,y\rangle$ είναι γρ. συναρτησοειδές (δηλ. $\langle ax_1+bx_2, y\rangle = a\langle x_1,y\rangle + b\langle x_2,y\rangle$).

(2) Ανισότητα Cauchy-Schwartz:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}.$$

Απόδειξη ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$):

Γράφουμε: $\langle y,x\rangle = Me^{i\theta}$, $M=|\langle x,y\rangle|$

Παίρνουμε $\lambda = re^{it}$ και γράφουμε:

$$0\leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \bar\lambda\,\overline{\langle y,x\rangle} + |\lambda|^2\langle y,y\rangle =$$

$$= \langle x,x\rangle + 2\mathrm{Re}(\underbrace{\lambda\langle y,x\rangle}_{=Mre^{i(\theta+t)}}) + \underbrace{|\lambda|^2}_{=r^2}\langle y,y\rangle$$

Επιλέγουμε $t=-\theta$.

Άρα $\forall r\in\mathbb{R}$ $\langle x,x\rangle + 2Mr + r^2\langle y,y\rangle \geq 0 \xRightarrow{\Delta\leq 0} M^2\leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$ ■

(3) Νόρμα που επάγεται από το $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$\forall x\in X$, $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

Είναι νόρμα: για την τριγ. ανισότητα,

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \leq$$

$$\leq \langle x,x\rangle + 2|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle \leq$$

$$\underset{C-S}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2.$$

(4) Αν $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$, τότε $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$

Απόδειξη:

$$|\langle x,y\rangle - \langle x_n,y_n\rangle| = |\langle x-x_n, y\rangle + \langle x_n, y-y_n\rangle| \underset{\text{C-S}}{\leq}$$

$$\leq \underset{\downarrow\, 0}{\|x-x_n\|}\cdot\|y\| + \underbrace{\|x_n\|}_{\text{φραγμένη ως συγκλίνουσα}} \cdot \underset{\downarrow\, 0}{\|y-y_n\|} \longrightarrow 0.$$

(5) Κανόνας του παραλληλογράμμου

$\forall x,y\in X$ $\quad \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 \overset{(*)}{=} 2\|x\|^2+2\|y\|^2$ (πράξεις)

Σημείωση: Μια νόρμα στον X προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο ($\exists \langle\cdot,\cdot\rangle : \forall x \ \|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$) $\iff$ ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Αν η $\|\cdot\|$ ικανοποιεί την $(*)$ τότε το εσωτ. γινόμενο που επάγει την $\|\cdot\|$ είναι το:

$$\langle x,y\rangle \underset{\text{ορ.}}{=} \frac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2}{4} \qquad (\mathbb{K}=\mathbb{R})$$

(Θέλει απόδειξη το ότι είναι εσωτ. γινόμενο)

και αν $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, είναι το:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

(6) Καθετότητα:

Ορισμός

Τα x και y λέγονται ορθογώνια (ή κάθετα) και γράφουμε $x\perp y$ αν $\langle x,y\rangle=0$.

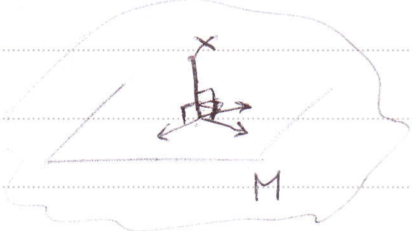
Πυθαγόρειο Θεώρημα:

Αν $x\perp y$ τότε $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$ (πράξεις)

Ορισμός

Αν $M \subseteq X$ και $x \in X$, τότε λέμε ότι το x είναι κάθετο στο M αν $\forall y \in M$, $x \perp y$. (~~[illegible]~~)

Εδώ μας ενδιαφέρει η περίπτωση που ο M είναι γρ. υπόχωρος του X και μάλιστα κλειστός.



Ορισμός

Ένας χώρος X με εσωτ. γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς την $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

↳ (συμβολισμός: H)

Παράδειγμα

(1) Ο $L_2(\mathbb{T})$ είναι πλήρης, με εσωτ. γινόμενο το

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

και αντίστοιχη νόρμα την $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}$.

Πλήρης είναι από το Θεώρημα Riesz-Fischer ($\forall p \geq 1$ ο $L_p(\mathbb{R}^d)$ είναι πλήρης, όμοια και ο $L_p(\mathbb{T})$).

(2) Ο $\ell_2(\mathbb{Z}) = \left\{(a_k)_{k=-\infty}^{+\infty} : \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2 < +\infty\right\}$ είναι πλήρης.

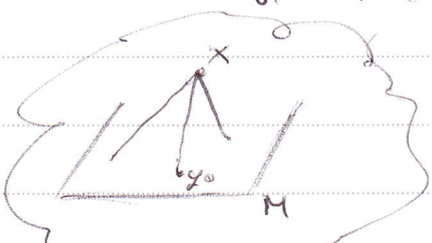
Βέλτιστη προσέγγιση

Θεώρημα 1

Έστω H χώρος Hilbert και έστω M κλειστός γρ. υπόχωρος του H.

$$\forall x \in H \ \exists!\, y_0 \in M : \forall y \in M \quad \|x - y_0\| \leq \|x - y\|$$

$$\|x-y_0\| = \delta \overset{\text{ορ.}}{=} \inf\{\|x-y\| : y \in M\} = \operatorname{dist}(x, M)$$



Απόδειξη:

Από τον ορισμό του infimum $\exists\, y_n \in M$:

$$\delta \le \underset{\downarrow\ \delta}{\|x - y_n\|} < \delta + \frac{1}{n}$$

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου:

$$\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\| \ge \delta \quad \left(\frac{y_n+y_m}{2} \in M\right)$$

$$2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 = 4\left\|x - \frac{(y_n+y_m)}{2}\right\|^2 + \|y_n - y_m\|^2$$

$$\Rightarrow \|y_n - y_m\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 <$$

$$\le 2\left(\delta + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(\delta + \frac{1}{m}\right)^2 - 4\delta^2 =$$

$$= 4\delta\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + 2\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}\right) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

Άρα η (y_n) είναι βασική $\xrightarrow[\text{M κλειστός}]{\text{H πλήρης}}$ $\exists\, y_0 \in M : y_n \to y_0$

Έχουμε $\delta \le \underset{\downarrow\ \|x - y_0\|}{\|x - y_n\|} \le \underset{\downarrow\ \delta}{\delta + \frac{1}{n}}$

Άρα $\boxed{\|x - y_0\| = \delta.}$ ■

Παρατηρήσεις:

Το y_0 είναι μοναδικό (άσκηση) και $x - y_0 \perp M$ (άσκηση)
(συμβολισμός: $y_0 = P_M(x) =$ η προβολή του x στον M).

Ορθοκανονικές ακολουθίες - ορθοκανονικές βάσεις

(1) Μια ακολουθία $\{e_k\}$ λέγεται ορθοκανονική αν

$$\langle e_k, e_s \rangle = \begin{cases} 1, & k = s \\ 0, & k \ne s \end{cases}$$

(δηλ. τα e_k έχουν νόρμα 1 και είναι ανά δύο κάθετα)

(2) Μια ορθοκανονική ακολουθία λέγεται ορθοκανονική βάση αν $H = \overline{\text{span}}\{e_1, e_2, \dots\}$.

Θεώρημα 1

Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert έχει ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη

Καθε ορθοκανονική ~~ακολουθία~~ οικογένεια του H είναι αριθμήσιμο σύνολο (αν e_κ, e_s είναι δύο στοιχεία της, τότε: $\|e_\kappa - e_s\|^2 \overset{\Pi.\Theta}{=} \|e_\kappa\|^2 + \|e_s\|^2 = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|e_\kappa - e_s\| = \sqrt{2},\ \kappa \neq s \Rightarrow B(e_\kappa, \tfrac{\sqrt{2}}{2}) \cap B(e_s, \tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \emptyset$$

(Αφού H διαχωρίσιμος, αυτές οι μπάλες είναι αριθμήσιμες το πλήθος, ~~αν $\kappa \neq s$~~).

Ορίζουμε μερική διάταξη στην κλάση των ορθοκ. οικογενειών, την $\subseteq$, παίρνουμε maximal στοιχείο από Zorn, που είναι αριθμήσιμη και δείχνουμε ότι είναι βάση:

Έστω ότι η $\{e_\kappa\}$ είναι maximal ορθοκανονική ακολουθία.

Αν δεν είναι βάση, τότε $M = \overline{\text{span}}\{e_\kappa\} \subsetneq H$.

Άρα, $\exists x \in H,\ x \notin M$.

Τότε, $\underset{\overset{\cap}{M}}{x} \neq \underset{\overset{\cap}{M}}{P_M(x)}$ και $y = x - P_M(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall \kappa \quad y = x - P_M(x) \perp e_\kappa$$

Αν ορίσουμε $e = \dfrac{x - P_M(x)}{\|x - P_M(x)\|}$, τότε $\|e\| = 1$ και η $e \cup \{e_1, e_2, \dots\}$ είναι ορθοκανονική, άτοπο. ■

Θεώρημα 2

Έστω $\{e_\kappa, \dots\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H.

Τότε: ① Ανισότητα Bessel: $\forall x \in H \quad \sum_\kappa |\langle x, e_\kappa \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

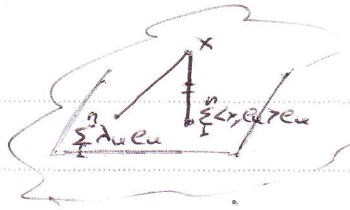
② Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Η $\{e_\kappa \dots\}$ είναι βάση: $H = \overline{\text{span}}\{e_\kappa \dots\}$

(β) Αν $x \perp e_\kappa\ \forall \kappa$ τότε $x = 0$.

(γ) $\forall x \quad s_n(x) = \sum_{\kappa \leq n} \langle x, e_\kappa \rangle \cdot e_\kappa \to x$ (δηλ. $x = \sum \langle x, e_\kappa \rangle \cdot e_\kappa$)

(δ) $\forall x \in H \quad \|x\|^2 = \sum_\kappa |\langle x, e_\kappa \rangle|^2$. (Parseval)



Θεώρημα 3

Έστω $e_1, e_2, \dots, e_n$ ορθοκανονικά σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο.
Τότε, για κάθε $x \in X$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n$ $\|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\| \geq \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\|$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι:

$$\forall s = 1, \dots, n \quad \langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k , e_s \rangle = \langle x, e_s \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \cdot \underbrace{\langle e_k, e_s \rangle}_{\substack{k \neq s \\ \| \\ 0}} =$$

$$= \langle x, e_s \rangle - \langle x, e_s \rangle = 0.$$

Άρα, $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \perp M$, άρα το $\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση του x από το M. ■

Απόδειξη του Bessel

$\forall n$ έχουμε: $x = \underbrace{\left(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\right)}_{\perp M} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k}_{\in M}$

Άρα (Π.Θ.) $\|x\|^2 = \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 + \underbrace{\|\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2}_{\text{Π.Θ.}} =$

$$= \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 + \|\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle\|^2 \quad (*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Η $(*)$ επίσης, μου λέει ότι έχω ισότητα στην Bessel
$\iff \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \to x \iff x = \sum_{k} \langle x, e_k \rangle e_k$. ■

Στον $L_2(\mathbb{T})$:

① Η $e_k(x)=e^{ikx}$, $k\in\mathbb{Z}$ είναι ορθοκανονική (✓)
($\int e^{ikx}e^{-isx}dx=0$, αν $k\neq s$).

② Η $\{e_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση.
Θα δείξουμε το (β) του χαρακτηρισμού:
Αν $f\in L_2(\mathbb{T})$ και $f\perp e_k$ $\forall k \underset{\text{ορ.}}{\iff} 0=\langle f,e_k\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(x)e^{-ikx}dx$
$=\hat{f}(k)\Rightarrow$

$\Rightarrow f=0$.
($\underset{\forall n}{s_n(f)\equiv 0}\Rightarrow \underset{\forall n}{\sigma_n(f)\equiv 0}$ και $\underset{\text{(Fejér)}}{\|\sigma_n(f)-f\|_2\to 0}\Rightarrow\|f\|_2=0\Rightarrow f=0$).

③ Τώρα ξέρουμε ότι ισχύουν τα (γ) και (δ):
(γ) $\forall f\in L_2(\mathbb{T})$ $\|\sum_{k=-n}^{n}\langle f,e_k\rangle e_k-f\|_2\to 0$

$$\sum_{k=-n}^{n}\langle f,e_k\rangle e_k=\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikx}=s_n(f,x)$$

Δηλαδή, $\|s_n(f)-f\|_2\longrightarrow 0$.
(δ) Ισχύει η Parseval: $\forall f\in L_2(\mathbb{T})$ $\|f\|_2^2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\langle f,e_k\rangle|^2=$
$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(k)|^2$.

Παραλλαγή της Parseval:

Αν $f,g\in L_2(\mathbb{T})$, τότε $\langle f,g\rangle=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)\cdot\overline{\hat{g}(k)}$.

Απόδειξη

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2+i\|f+ig\|^2-i\|f-ig\|^2-\|f-g\|^2\right)$$

$$=\sum_k\frac{1}{4}\left[|\hat{f}(k)+\hat{g}(k)|^2+i|\hat{f}(k)+i\hat{g}(k)|^2-i|\hat{f}(k)-i\hat{g}(k)|^2-|\hat{f}(k)-\hat{g}(k)|^2\right]$$

$$=\sum_k\hat{f}(k)\cdot\overline{\hat{g}(k)}.$$ ∎