Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 25ο (21-05-2015)

Πυρήνας του Poisson

Έστω $f\in L_1(\mathbb{T})$.

Οι Abel μέσοι της f: $A_r(f,x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|}\hat{f}(k)e^{ikx}$, $0<r<1$.

Με πράξεις βλέπουμε ότι $A_r(f,x)=(f*P_r)(x)$, όπου

$$P_r(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|}e^{ikx} \quad \text{(ο } r\text{-πυρήνας του Poisson).}$$

Κλειστή μορφή για το $P_r(x)$:

$$P_r(x)=\sum_{k=0}^{\infty} r^{k}e^{ikx}+\sum_{k=-\infty}^{-1} r^{-k}e^{ikx}=\sum_{k=0}^{\infty}\overset{\text{γεωμ. σειρά}}{(\underbrace{re^{ix}}_{\omega})^{k}}+\sum_{s=1}^{\infty}\underbrace{r^{s}e^{-isx}}_{=(re^{-ix})^{s}=(\bar{\omega})^{s}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\omega^{k}+\sum_{s=1}^{\infty}\bar{\omega}^{s}=\frac{1}{1-\omega}+\frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}}=\frac{1-\bar{\omega}+\bar{\omega}(1-\omega)}{(1-\omega)(1-\bar{\omega})}=$$

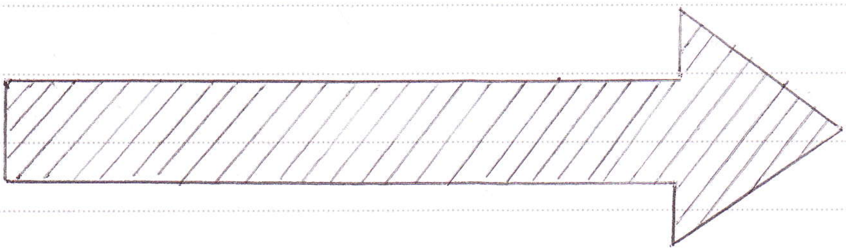
$$=\frac{1-\omega\bar{\omega}}{|1-\omega|^{2}}=\frac{1-|\omega|^{2}}{|1-\omega|^{2}}\ \underset{1-\omega=1-r\cos x-ir\sin x}{\overset{|\omega|=r}{=\!=\!=\!=\!=}}\ \frac{1-r^{2}}{(1-r\cos x)^{2}+r^{2}\sin^{2}x}=$$

$$=\frac{1-r^{2}}{1-2r\cos x+r^{2}}=\frac{1-r^{2}}{(1-r)^{2}+2r(1-\cos x)}$$

Δηλαδή:

$$A_r(f,x)=(f*P_r)(x), \quad \text{όπου} \quad \boxed{P_r(x)=\frac{1-r^{2}}{1-2r\cos x+r^{2}}}$$

↳ άρτια



Πρόταση

Η $(P_r)_{r>0}$ είναι καλός πυρήνας (καθώς $r\to 1^-$):

(α) $\forall r\in(0,1)$ $\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx = 1$

(β) $\forall 0<\delta<\pi$, $\quad \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|x|\le\pi} P_r(x)\,dx = 0$

Απόδειξη

(α) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|}e^{ikx}\right)dx \xrightarrow{\text{έχω ομ. σύγκλιση σειράς}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx}_{0 \text{ για } k\neq 0} =$$

$$= \underbrace{r^0}_{1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{e^{i0x}}_{1}\,dx = 1.$$

(β) Έστω $0<\delta<\pi$.

Φράσσουμε το $P_r(x)$ στο $[\delta,\pi]$:

$$0\le P_r(x) = \frac{1-r^2}{(1-r)^2+2r(1-\cos x)} \le \frac{1-r^2}{\cancel{(1-r)^2}+2r(1-\cos\delta)} \underset{r>\frac{1}{2}}{<} \frac{1-r^2}{1-\cos\delta}$$

(Αν υποθέσω ότι $r>\frac{1}{2}$, $\delta\le x\le\pi \Rightarrow \cos x\le\cos\delta \Rightarrow 1-\cos x\ge 1-\cos\delta$)

Τότε, για $r>\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|x|\le\pi} P_r(x)\,dx \le \frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_{\delta}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-\cos\delta}\,dx \le \frac{2(1-r^2)}{1-\cos\delta} \xrightarrow[r\to 1^-]{} 0 \quad \blacksquare$$

Πόρισμα (της Θεωρίας των καλών πυρήνων)

Έστω $f\in L_\infty(\mathbb{T})$.

Τότε, αν η f είναι συνεχής στο $x\in\mathbb{T}$,

έχουμε $A_r(f,x)\xrightarrow[r\to 1^-]{} f(x)$

Δηλαδή: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt \xrightarrow[r\to 1^-]{} f(x)$.

Πρόταση

Αν $f,g\in L_1(\mathbb{T})$, τότε $\widehat{f*g}(k) = \hat{f}(k)\cdot\hat{g}(k)$ $\quad\forall k\in\mathbb{Z}$.

Ασκήσεις

Ανισότητα του Bernstein:

Αν p τριγ. πολυώνυμο βαθμού το πολύ n,

$$\|p'\|_\infty \le n \cdot \|p\|_\infty .$$

Άσκηση 8

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε: $G_n(x) = F_n(x) \cdot \sin(nx)$.

Δείξτε ότι αν p είναι τριγ. πολυώνυμο βαθμού $\le n$, τότε

(*) $p'(x) = -2n\,(p * G_n)(x)$ και χρησιμοποιώντας το δείξτε ότι: $\|p'\|_\infty \le 2n \cdot \|p\|_\infty$

Λύση

Αν έχουμε δείξει την (*), για κάθε $x \in \mathbb{T}$ έχουμε:

$$|p'(x)| = 2n\,|(p * G_n)(x)| = 2n\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x-t)\cdot G_n(t)\,dt\right| \le$$

$$\le 2n\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|p(x-t)|}_{\le \|p\|_\infty}\cdot \underbrace{F_n(t)}_{F_n = |F_n|}\cdot \underbrace{|\sin(nt)|}_{\le 1}\,dt \le$$

$$\le 2n\,\|p\|_\infty \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt}_{=1} = 2n\|p\|_\infty .$$

Για την (*):

Η (*) είναι "γραμμική" ως προς p.

Αν την έχω για κάποια $p_1, \dots, p_s$ την έχω και για κάθε γρ. συνδυασμό τους.

Κάθε τριγ. πολυώνυμο βαθμού $\le n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $p_k(x) = e^{ikx}$, $k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$.

Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι $\forall |k| \le n$

$$p_k'(x) = -2n\,(p_k * G_n)(x)$$

• $p_k(x) = e^{ikx} \Rightarrow p_k'(x) = ik\,e^{ikx}$

$$(p_u * G_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iu(x-t)} F_n(t)\sin(nt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iu(x-t)}\left(\sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)e^{ist}\right)\frac{e^{int}-e^{-int}}{2i}\,dt =$$

$$= \frac{e^{iux}}{2i}\sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\Bigg[\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+s-u)t}\,dt}_{=0 \text{ εκτός αν } s=k-n \iff u=n+s>0} - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-u-n)t}\,dt}_{=0 \text{ εκτός αν } s=u+n \iff u=s-n<0}\Bigg]$$

(α) Αν $1\le u\le n$, τότε μόνο ένα από τα "αριστερά" ολοκληρώματα είναι ίσο με 1 (τα άλλα 0), αυτό για το οποίο: $\boxed{s=k-n}$

Δηλαδή: $(p_u * G_n)(x) = \frac{e^{iux}}{2i}\left(1-\frac{\overset{n-u}{|k-n|}}{n}\right) = \frac{u}{2in}e^{iux} = -\frac{iue^{iux}}{2n}$.

(β) Αν $-n\le u\le -1$, τότε έχω μόνο το $s=u+n$ να είναι

$(p_u * G_n)(x) = \frac{e^{iux}}{2i}\left(1-\frac{u+n}{n}\right)(-1) = \frac{e^{iux}}{2i}\left(-\frac{u}{n}\right)(-1) = -\frac{iue^{iux}}{2n}$.

(γ) Αν $u=0$, άσκηση! □

Άσκηση 4

Έστω $f: [-\pi,\pi]$ άρτια φραγμένη ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $a_u(f)\ge 0$ $\forall u\ge 0$.
Τότε, η $\sum_{u=0}^{\infty} a_u$ συγκλίνει.

[Βασική παρατήρηση:
$|\sigma_n(f,x)| = |(f*F_n)(x)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{|f(x-t)|}_{\le\|f\|_\infty} F_n(t)\,dt \le \|f\|_\infty\cdot 1$
Αν η f είναι φραγμένη, τότε $\|\sigma_n(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty$]

Λύση

Θέλουμε να φράξουμε το $\sum_{u=0}^{n} a_u \le \underline{M}$

$$s_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \cos(nx) \quad / \, b_k = 0, \quad k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_n(f,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \Rightarrow a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 2\left(\frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \leq$$

$$\leq 2\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\right) = 2 s_n(f,0).$$

Άρα, αρκεί να φράξουμε το $\underline{s_n(f,0)}$.

$$\left(\|f\|_\infty \geq \sigma_n(f,0) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s_k(f,0) \geq \frac{N-n}{N} s_n(f,0) \quad \forall N > n \right.$$

Ξέρω ότι $s_k(f,0) \nearrow$ γιατί $a_k \geq 0$.)

Έστω $n \in \mathbb{N}$

Για $N = 2n$ έχουμε:

$$\frac{\cancel{n} s_n(f,0)}{2\cancel{n}} \leq \frac{s_n(f,0) + \ldots + s_{2n-1}(f,0)}{2n} \leq \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} s_k(f,0) = \sigma_{2n}(f,0) \leq$$

$$\leq \|f\|_\infty$$

Άρα, $\forall n \quad s_n(f,0) \leq 2 \cdot \|f\|_\infty \Rightarrow a_0 + a_1 + \ldots + a_n \leq 2 \cdot s_n(f,0) \leq 4\|f\|_\infty.$

$\square$

Άσκηση 11

Έστω $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ με $|k \cdot \hat{f}(k)| \leq A \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Δείξτε ότι $\|s_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty + 2A$.

Λύση

[Ακόμα κι αν η f είναι συνεχής έχουμε δει ότι μπορεί να ισχύει $\limsup_n \|s_n(f)\|_\infty = +\infty$.

Βασική παρατήρηση II:

$$s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} - \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\hat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|\hat{f}(k) e^{ikx}}{n+1}$$]

Με τις υποθέσεις μας,

$$\left|\sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|\hat{f}(k) e^{ikx}}{n+1}\right| \leq \sum_{k=-n}^{n} \frac{\overbrace{|k\hat{f}(k)|}^{\leq A}}{n+1} \leq \frac{A}{n+1}(2n+1) \leq 2A$$

Τώρα, $|s_n(f,x)| \leq |\sigma_{n+1}(f,x)| + \left|\sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|\hat{f}(k) e^{ikx}}{n+1}\right| \underset{\text{ΒΠ II}}{\leq} \|f\|_\infty + 2A.$ $\square$

Άσκηση 9

$f \in C(\mathbb{T})$, με τιμές στο $\mathbb{R}$.
Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2+b_k^2} = 0$.
Δείξτε ότι $S_n(f) \xrightarrow[\text{ομ.}]{} f$.

Λύση

- Επειδή η f είναι συνεχής $\sigma_n(f) \xrightarrow{\text{ομ}} f$.
  δηλαδή, $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \longrightarrow 0$.
- Θέλω να γράψω $\|s_n(f) - f\|_\infty \leq \underbrace{\|s_n(f) - \sigma_n(f)\|_\infty}_{\to 0} + \underbrace{\|\sigma_n(f) - f\|_\infty}_{\to 0}$

Γράφουμε:

$$s_n(f,x) - \sigma_n(f,x) = s_n(f,x) - \frac{s_0(f,x)+s_1(f,x)+\dots+s_{n-1}(f,x)}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(s_n(f,x) - s_k(f,x)\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}(a_j\cos jx + b_j\sin jx) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}(a_j\cos jx + b_j\sin jx) =$$

$$\overset{0\leq k<j}{=} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j(a_j\cos jx + b_j\sin jx) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2+b_k^2}\,\cancelto{1}{\sqrt{\cos^2 kx + \sin^2 kx}}. \quad \square$$

Άσκηση 12

Έστω $p \geq 1$ και $f \in L_p(\mathbb{T})$: $n \cdot \| \sigma_n(f) - f \|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Τότε, η f είναι σταθερή.

Λύση

Ξέρουμε ότι $\| \sigma_n(f) - f \|_p \to 0$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{f}(u) = 0$ $\quad \underline{\forall u \neq 0}$

$$\sigma_n(f,x) = \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|s|}{n}\right) \hat{f}(s) e^{isx} \Rightarrow \widehat{\sigma_n(f)}(u) = \left(1 - \frac{|u|}{n}\right) \hat{f}(u).$$

Για $n > |u|$:

$$\widehat{\sigma_n(f) - f}(u) = \widehat{\sigma_n(f)}(u) - \hat{f}(u) = \left(1 - \frac{|u|}{n}\right) \hat{f}(u) - \hat{f}(u) = \frac{-|u| \hat{f}(u)}{n}.$$

Άρα, $|\hat{f}(u)| = \frac{n}{|u|} \cdot |\widehat{\sigma_n(f) - f}(u)| \leq$ $\quad \{ |\hat{g}(u)| \leq \|g\|_1 \leq \|g\|_p.$

$$\leq \frac{n}{|u|} \| \sigma_n(f) - f \|_1 \underset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{n \| \sigma_n(f) - f \|_p}{|u|} \xrightarrow[\text{υπόθ}]{n \to \infty} 0.$$

Άρα, $\hat{f}(u) = 0$

Αν θεωρήσω την $\underbrace{f - \hat{f}(0)}_{g}$, τότε $\hat{g}(u) = 0$ $\forall u \in \mathbb{Z} \xRightarrow{g \in L_p} g \equiv 0.$

$\square$