Ανάλυση Fourier & Ολοκληρώματα Lebesgue
Μάθημα 24ο (20-05-2015)

Διαδικασία

Θέλουμε να δείξουμε ότι:

(1) $\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx\right)dy$

∘ Fubini: αυτό μπορώ να το κάνω αν η $f(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη.

∘ Για να δείξω ότι η $f(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη, ισοδύναμα, πρέπει να δείξω ότι η $|f(x,y)|$ είναι ολοκληρώσιμη.

∘ Για τις μη αρνητικές συναρτήσεις έχω πάντα την (1) (Tonneli).

Δηλαδή, αν $\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|dx\right)dy$ και αν κάποιο από τα δύο είναι πεπερασμένο, τότε είναι και το άλλο και η $|f(x,y)|$ είναι ολοκληρώσιμη.

Πρόταση

Αν $f,g \in L_1(\mathbb{T})$, τότε $f*g \in L_1(\mathbb{T})$ και $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{f*g}(k) = \hat{f}(k)\cdot\hat{g}(k).$$

Απόδειξη

(α) $f*g \in L_1(\mathbb{T})$

Δείχνουμε ότι $|f*g| \in L_1(\mathbb{T})$

Έχουμε: $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|(f*g)(x)|dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-y)g(y)dy\right|dx \leq$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}}\left(\int_{\mathbb{T}}|f(x-y)||g(y)|dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}}|g(y)|\left(\int_{\mathbb{T}}|f(x-y)|\,dx\right)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|g(y)|\cdot\|f\|_1\,dy = \|f\|_1\cdot\|g\|_1 < \infty.$$

(β) $$\widehat{(f*g)}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(f*g)(x)\,e^{-ikx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\underbrace{f(x-y)\cdot g(y)\,e^{-ikx}}_{F(x,y)}\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(\underbrace{x-y}_{z})\,e^{-ik(\underbrace{x-y}_{z})}\,dx\right)g(y)e^{-iky}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\hat{f}(k)\,g(y)\,e^{-iky}\,dy = \hat{f}(k)\cdot\hat{g}(k). \blacksquare$$

Άσκηση 5

$0 < \lambda(E) < \infty, \qquad 1 \le p < q < \infty$

(α), (β) $\quad L_q(E) \subseteq L_p(E)$

(γ) Ο εγκλεισμός είναι γνήσιος: $\exists f \in L_p(E)$ αλλά $f \notin L_q$.

$\left(E = \mathbb{T}, \quad L_1(\mathbb{T}) \supseteq L_2(\mathbb{T}) \supseteq \dots \supseteq L_\infty(\mathbb{T}) \supseteq C(\mathbb{T}) \supseteq C^2(\mathbb{T}) \supseteq \dots \supseteq C^\infty(\mathbb{T})\right).$

Λύση

(α) (Το (β) έπεται από την $\|f\|_p \le \|f\|_q\,(\lambda(E))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$).

Έχουμε:

$$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p\cdot 1 \underset{\text{Hölder}}{\le} \left(\int_E (|f|^p)^{q/p}\right)^{p/q}\left(\int_E 1^{r}\right)^{1-\frac{p}{q}} = \|f\|_q^p\,\lambda(E)^{1-\frac{p}{q}} \Rightarrow$$

η $|f|^p$ θα υψωθεί στην q/p

η 1 — // — στο συζυγή εκθέτη (ας πούμε r).

$$\Rightarrow \|f\|_p \le \|f\|_q\cdot(\lambda(E))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

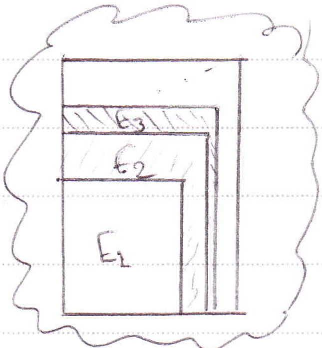
(β) Αν $f \in L_q \Rightarrow \|f\|_q < \infty \xRightarrow{(\alpha)} \|f\|_p < \infty \Rightarrow f \in L_p$.

(γ) Μπορώ να γράψω το E σαν ξένη ένωση $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ όπου $\lambda(E_n) = \frac{\lambda(E)}{2^n}$.

Ορίζουμε $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^+$ με $F(x)=\lambda(E\cap[-x,x]^d)$

• <u>Η F είναι συνεχής</u>: αν $x<y$, τότε:

$$|F(y)-F(x)|=\lambda(E\cap([-y,y]^d\setminus[-x,x]^d))\le$$
$$\le\lambda([-y,y]^d-[-x,x]^d)=$$
$$=(2y)^d-(2x)^d\xrightarrow[x\to y]{}0$$



• $F(0)=0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lambda(E)$

Αν $x_n\nearrow+\infty$, τότε $E\cap[-x_n,x_n]^d\nearrow E$ γιατί $\bigcup[-x_n,x_n]^d=\mathbb{R}^d\Rightarrow$

$\Rightarrow F(x_n)=\lambda(E\cap[-x_n,x_n]^d)\longrightarrow\lambda(E)$.

• Από Θ.Ε.Τ., $\exists x_1: F(x_1)=\lambda(\underbrace{E\cap[-x_1,x_1]^d}_{E_1})=\dfrac{\lambda(E)}{2}$

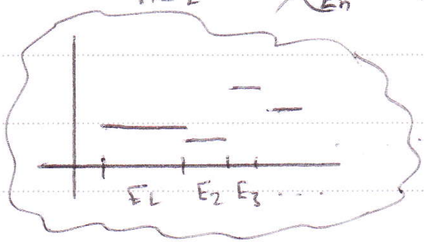
$\exists x_2: F(x_2)=\lambda(\underbrace{E\cap[-x_2,x_2]^d}_{B_2})=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}\right)\lambda(E)$.

Αν $E_2=B_2\setminus E_1$, τότε $\lambda(E_2)=\lambda(B_2)-\lambda(E_1)=\dfrac{1}{2^2}\lambda(E)$ κ.ο.κ.

Θα θεωρήσουμε f_0 της μορφής $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\chi_{E_n}(x)$, $a_n>0$.

Άρα, $\int_E|f|^p=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f|^p=\sum\limits_{n=1}a_n^p\lambda(E_n)=$

$$=\lambda(E)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^p}{2^n}$$



Ομοίως, $\int_E|f|^q=\lambda(E)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n^q}{2^n}$.

Πρέπει να διαλέξουμε a_n:

$\sum\dfrac{a_n^p}{2^n}<\infty$ και $\sum\dfrac{a_n^q}{2^n}=\infty$

(Θέλω $\dfrac{a_n^q}{2^n}=1\iff a_n=2^{\frac{n}{q}}$)

Τώρα:

$$\sum\frac{a_n^p}{2^n}=\sum\frac{2^{n\frac{p}{q}}}{2^n}=\sum\frac{1}{2^{n(1-\frac{p}{q})}}=\sum\left(\frac{1}{2^{1-\frac{p}{q}}}\right)^n<\infty.\quad\square$$

Άσκηση 6

$1 \le p < q < r < \infty$.

Αν $f \in L_q(E)$, τότε υπάρχουν $g \in L_p(E)$, $h \in L_r(E)$ ώστε $f = g + h$.

Λύση

Ξέρω ότι $\int |f|^q < \infty$.

Ορίζουμε $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } |f(x)| \ge 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ $\left(g = f \cdot \chi_A \ (A = \{|f| \ge 1\})\right)$.

και $h(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } |f(x)| \ge 1 \\ f(x), & \text{αν } |f(x)| < 1. \end{cases}$

Τότε, $f = g + h$.

Έχουμε: $\int |g|^p = \int_A |g|^p = \int |f|^p \le \int_A |f|^q \le \int |f|^q < \infty$.

και $\int |h|^r = \int_{A^c} |h|^r \underset{\substack{h=f \\ |f|<1}}{\le} \int_{A^c} |f|^q \le \int |f|^q < \infty$. □

Άσκηση 9 (γενικευμένη Hölder).

Έστω $f_1, \ldots, f_k : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες και $c_1, \ldots, c_k > 0$ με $c_1 + c_2 + \ldots + c_k = 1$.

Τότε, $\int \prod_{i=1}^{k} |f_i|^{c_i} \le \prod_{i=1}^{k} \left(\int |f_i|\right)^{c_i}$

(Αν έχω 2 συναρτήσεις: $\int \underset{p = 1/c_1}{|f|^{c_1}} \underset{q = 1/c_2}{|g|^{c_2}} \underset{\text{Hölder}}{\le} \left(\int (|f|^{c_1})^{1/c_1}\right)^{c_1} \left(\int (|g|^{c_2})^{1/c_2}\right)^{c_2}$)

Λύση

(*) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\int |f_i| = 1$ $\forall i = 1, 2, \ldots, k$

(μετά, αν μου δώσουν κάποιες f_i θεωρώ τις $\frac{f_i}{\int |f_i|}$).

Η ln είναι κοίλη: $\ln(c_1 a_1 + \ldots + c_k a_k) \ge c_1 \ln a_1 + \ldots + c_k \ln a_k$ για $\sum c_k = 1$, $c_k \ge 0$.

Θέλω να φράξω την $\prod_{i=1}^{k} |f_i|^{c_i}$

Αρκεί να φράξω την $\ln\left(\prod_{i=1}^{k} |f_i|^{c_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i \ln |f_i| \underset{c_1 + \ldots + c_k = 1}{\le} \ln\left(\sum_{i=1}^{k} c_i |f_i|\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{k} |f_i|^{c_i} \le \sum_{i=1}^{k} c_i |f_i| \Rightarrow \int \prod_{i=1}^{k} |f_i|^{c_i} \le \sum_{i=1}^{k} c_i \underbrace{\int |f_i|}_{1} = c_1 + \ldots + c_k = 1$.

Άσκηση 12

$f_n \geq 0$, $f_n \in L_1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ και $\forall \delta > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\{x : |x| > \delta\}} f_n \, d\lambda = 0$.

Τότε, $\forall p > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_p = +\infty$.

Λύση

Έστω $M > 0$.

Ζητείμε n_0: $\forall n \geq n_0$ $\|f_n\|_p > M$.

Ζητείμε $g \in L_q$: η $\|g\|_q \cdot \|f_n\|_p \geq \int f_n g$.

Για οποσδήποτε μικρό δ $\underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} f_n}_{\int f_n \cdot \chi_{[-\delta,\delta]}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Για κάθε $\delta > 0$ αν πάρουμε $g = \chi_{[-\delta,\delta]}$ έχουμε:

$$\int f_n \cdot g \leq \|f_n\|_p \cdot \|g\|_q = \|f_n\|_p \left(\int_{-\delta}^{\delta} 1^q\right)^{1/q} =$$

$$= (2\delta)^{1/q} \cdot \|f_n\|_p = \frac{1}{2M} \|f_n\|_p,$$

αν επιλέξουμε $(2\delta)^{1/q} = \frac{1}{2M} \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{2(2M)^q}$.

Επίσης, $\int f_n \cdot g = \int_{-\delta}^{\delta} f_n = \int_{\mathbb{R}} f_n - \int_{|x|>\delta} f_n = 1 - \int_{|x|>\delta} f_n \to 1 - 0 = 1$.

Άρα, υπάρχει $n_0 = n_0(\delta)$: $\forall n \geq n_0$ $\int f_n \cdot g > \frac{1}{2}$.

Αν $n \geq n_0$ έχουμε:

$$\frac{1}{2} < \int f_n \cdot \chi_{[-\delta,\delta]} \leq \|f_n\|_p (2\delta)^{1/q} = \frac{1}{2M} \|f_n\|_p \Rightarrow \|f_n\|_p > M \quad \square.$$

Παρατήρηση: Αν $\lambda(E) = 1$, $\|f\|_p \leq \|f\|_q \cancel{(\lambda(E))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}}$.

Άσκηση 16

$0 < \lambda(E) < \infty$.

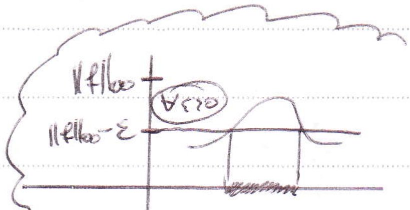
Αν $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη, τότε: $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

<u>Λύση</u>

Έχουμε: $\|f\|_p = \left(\underbrace{\int_E |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \le \left(\int_E \|f\|_\infty^p \, dx}_{\le \text{ σ.π.}} \right)^{1/p} = \left(\|f\|_\infty^p \, \lambda(E) \right)^{1/p}$

$$= (\lambda(E))^{1/p} \cdot \|f\|_\infty \xrightarrow[p\to\infty]{} 1 \cdot \|f\|_\infty = \|f\|_\infty .$$

Άρα, $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \le \|f\|_\infty$.



$\|f\|_\infty = \min\{ b>0 : \lambda(\{x : |f(x)| > b\}) = 0 \}$

Αν πάρω $0<\varepsilon<\|f\|_\infty$, τότε το

$A_\varepsilon = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ έχει $\lambda(A_\varepsilon) > 0$.

Γράφουμε: $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p} \ge \left(\int_{A_\varepsilon} |f|^p\right)^{1/p} \ge \left(\int_{A_\varepsilon} (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p\right)^{1/p} =$

$$= (\|f\|_\infty - \varepsilon) \cdot (\underbrace{\lambda(A_\varepsilon)}_{>0})^{1/p} \Longrightarrow$$

$\Rightarrow \liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \ge (\|f\|_\infty - \varepsilon) \cdot 1$

Αφού $\varepsilon>0$ τυχαίο έχουμε: $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \ge \|f\|_\infty$. □

<u>Άσκηση 18</u> (Γενίκευση του Steinhaus.)

Αν $0<\underbrace{\lambda(E), \lambda(F)}_{\in \mathbb{R}^d}<\infty$, τότε $E-F = \{a-b : a\in E, b\in F\}$ περιέχει μπάλα.

<u>Λύση</u>

- Η $\chi_E * \chi_F$ είναι συνεχής
- $(\chi_E * \chi_F)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\chi_E(x-y)\chi_F(y)}_{\text{που είναι } 1?} \, dy = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{(x-E)\cap F}(y)\, dy = \lambda((x-E)\cap F)$.

  (που είναι 1? $\left\{\begin{array}{l} \bullet\ y\in F \\ \bullet\ x-y\in E \end{array}\right\} \Rightarrow y-x\in -E \Rightarrow y\in x-E$)

Ζητάμε x: $(\chi_E * \chi_F)(x) > 0$

Παίρνουμε το $\int_{\mathbb{R}^d} (\chi_E * \chi_F)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x-y)\chi_F(y)\,dy\right) dx \ \overset{\text{Tonelli}}{\underset{\text{Fubini}}{=}}$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x-y)\chi_F(y)\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_F(y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\chi_E(x-y)}_{x\in y+E}\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_F(y)\,\lambda(y+E)\,dy =$$

$= \lambda(E)\cdot\lambda(F) > 0.$

$\Rightarrow \int \chi_E * \chi_F = \lambda(E)\cdot\lambda(F) > 0.$

$\Downarrow$

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^d: (\chi_E * \chi_F)(x) > 0$

$\Downarrow$ $\chi_E * \chi_F$ συνεχής.

$\exists \delta > 0: \forall y \in B(x,\delta) \ (\chi_E * \chi_F)(y) > 0.$

Για κάθε τέτοιο y έχουμε: $0 < (\chi_E * \chi_F)(y) = \lambda((y-E)\cap F) \Rightarrow$

$\Rightarrow (y-E)\cap F \neq \emptyset.$

Άρα $\exists z \in F, w \in E$ ώστε $z = y - w \Rightarrow \exists z \in F, w \in E: y = z + w \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in E + F.$

Άρα $E + F \supseteq B(x,\delta).$

(Όπου F, βάζουμε $-F$ και έπεται το ζητούμενο). $\square$