Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 23ο (19-05-2015)

Ο πυρήνας του Fejér

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Ορίζουμε τους Cesáro μέσους της $S(f)$:

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} S_m(f,x) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \hat{f}(k)\, e^{ikx}$$

Ορίζουμε $\boxed{F_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} D_m(x)}$ (ο n-οστός πυρήνας του Fejér).

$$F_n(x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ikx} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \Rightarrow F_n(x) \geq 0$$

Είναι καλός πυρήνας και προσέγγιση της μονάδας:

⊙ $\frac{1}{2\pi} \int_{\pi} F_n(x)\,dx = 1$

⊙ $0 \leq F_n(x) \leq \begin{cases} n \\ \frac{\pi}{nx^2}, & x \neq 0 \end{cases}$

Θεώρημα 1

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$

Αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$f(x+0) = \lim_{t \to x^+} f(t)$ και $f(x-0) = \lim_{t \to x^-} f(t)$ για κάποιο x,

τότε:

$$\sigma_n(f,x) \longrightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Ειδικότερα, αν f συνεχής στο x, τότε

$\sigma_n(f,x) \to f(x)$.

Επίσης, αν f συνεχής σε κάποιο κλειστό διάστημα $J \subseteq [-\pi,\pi]$, τότε:

$$\sigma_n(f) \xrightarrow{\text{ομ.}} f \text{ στο } J.$$

Απόδειξη

Γράφουμε $\underset{(f*F_n)(x)}{\sigma_n(f,x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)\,dt \underset{F_n \text{ άρτια}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\right]F_n(t)\,dt$

$$\left|\sigma_n(f,x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}F_n(t)\,dt - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F_n(t)\,dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| F_n(t)\,dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{\frac{|f(x+t)-f(x+0)|\cdot F_n(t)}{2}}_{\to 0}dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{\frac{|f(x-t)-f(x-0)|\,F_n(t)\,dt}{2}}_{\to 0}$$

Ξέρουμε ότι: $\lim_{t\to 0^+} f(x+t) = f(x+0)$

Έστω $\varepsilon>0$.

$\exists \eta\in(0,\pi)$: "αν $0<t<\eta$, τότε $|f(x+t)-f(x+0)|\leq\varepsilon$".

Γράφουμε: $\int_0^{\pi}|f(x+t)-f(x+0)|\cdot F_n(t)\,dt = \int_0^{\eta}\underbrace{|f(x+t)-f(x+0)|}_{\leq\varepsilon}F_n(t)\,dt + \int_{\eta}^{\pi}|f(x+t)-f(x+0)|\underbrace{F_n(t)}_{\frac{\pi^2}{nt^2}\leq\frac{\pi^2}{n\eta^2}}dt$

$$\leq \varepsilon\int_0^{\cancel{\eta}\ \pi}F_n(t)\,dt + \frac{\pi^2}{n\eta^2}\int_{\eta}^{\pi}\underbrace{|f(x+t)-f(x+0)|}_{\leq M(f,x)}dt \leq$$

$$\leq \pi\cdot\varepsilon + \frac{M(f,x)\cdot\pi^2}{\eta^2}\cdot\frac{1}{n}$$

Έπεται ότι: $\limsup_{n\to\infty}\left|\sigma_n(f,x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| \leq \ldots \leq 2\pi\varepsilon + \underbrace{\frac{M(f,x)\pi^2}{\eta^2}\cdot\frac{1}{n}}_{\to 0}$

Το ε ήταν τυχόν, άρα $\limsup = \lim = 0$. ∎

Πόρισμα

(1) Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $C(\mathbb{T})$ (ως προς την $\|\cdot\|_\infty$).

(2) Επίσης, για κάθε $1\leq p<\infty$ και για κάθε $f\in L_p(\mathbb{T})$ και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο T: $\|f-T\|_p<\varepsilon$.

Απόδειξη

(1) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$ έχουμε

$$\sigma_n(f) \xrightarrow{\text{ομ.}} f \Rightarrow \|\sigma_n(f)-f\|_\infty \to 0.$$

Όμως κάθε $\sigma_n(f,x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\hat{f}(k)e^{ikx}$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Άρα, η f προσεγγίζεται από τριγ. πολυώνυμα.

(2) Έστω $f \in L_p(\mathbb{T})$ και έστω $\varepsilon > 0$.

Ξέρουμε (?) ότι υπάρχει συνεχής $g : \|f-g\|_p < \varepsilon/2$.

Επίσης, υπάρχει τριγ. πολυώνυμο $T : \|g-T\|_\infty < \varepsilon/2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \|g-T\|_p \le \|g-T\|_\infty < \varepsilon/2$. και το συμπέρασμα έπεται απ'την τριγωνική ανισότητα. ■

Είχαμε δει ότι αν $f \in L_1(\mathbb{R})$ και αν $x \in Leb(f)$ και αν $(K_\delta)_{\delta>0}$ είναι προσέγγιση της μονάδας, τότε $(f * K_\delta)(x) \xrightarrow[\delta\to 0]{} f(x)$

$[f \in L_1(\mathbb{T}),\ F_n \equiv K_{1/n},\ (F_n) = (K_{1/n})$ προσέγγιση της μονάδας$]$

Άρα, έχουμε το εξής:

Θεώρημα 2

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$.

Τότε, $\sigma_n(f,x) = (f * F_n)(x) \longrightarrow f(x) \quad \forall x \in Leb(f)$.

Σημείωση:

Ο Kolmogorov έχει δείξει ότι υπάρχει $f_0 \in L_1(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\forall x \in \mathbb{T}$ η $\{S_n(f_0,x)\}$ αποκλίνει.

Όμως, το Θεώρημα 2 δείχνει ότι $\forall f \in L_1(\mathbb{T})$

$\sigma_n(f,x) \longrightarrow f(x)$ σχεδόν παντού (γιατί σχεδόν όλα τα $x \in \mathbb{T}$ είναι σημεία Lebesgue της f).

<u>Θεώρημα 3</u>

Έστω $1 \le p < \infty$.

Για κάθε $f \in L_p(\mathbb{T})$ $\|\sigma_n(f) - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

<u>Απόδειξη</u>

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $h_n \in L_q(\mathbb{T})$ (όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του $p>1$, για $p=1 \rightsquigarrow$ άσκηση) με $\|h_n\|_q \le 1$, τέτοια ώστε:

$$\|\sigma_n(f) - f\|_p = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (\sigma_n(f,x) - f(x)) \cdot h(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-y)F_n(y)\,dy - f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F_n(y)\,dy \right) h_n(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(x-y) - f(x))F_n(y)\,dy \right) h_n(x)\,dx$$

$$\underset{\substack{\text{Fubini} \\ + \text{ απόλυτα}}}{\le} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \overbrace{|\underset{\substack{\| \\ f_y(x)}}{f(x-y)} - f(x)|}^{\in L_p} \, \overbrace{|h_n(x)|}^{\in L_q}\,dx \right) F_n(y)\,dy$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\le} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \|f_{-y} - f\|_p \cancel{\|h_n\|_q}\, F_n(y)\,dy$$

Ορίζουμε $A(y) = \|f_{-y} - f\|_p$.

Η A είναι συνεχής στο 0: $\lim\limits_{y\to 0}\|f_{-y} - f\|_p = 0 = A(0)$

Άρα, από το Θ.1, $\sigma_n(A,0) \longrightarrow A(0) = 0$

$$\overset{\|}{(A * F_n)(0)} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} A(t)F_n(\cancel{x}-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \|f_{-t} - f\|_p F_n(t)\,dt.$$

■

Πόρισμα είναι η μοναδικότητα για $f \in L_p(\mathbb{T})$

⊛ Είχαμε δείξει ότι αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $\hat{f}(k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$.

Θεώρημα 4

Έστω $f \in L_p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$.
Αν $\hat{f}(k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$ (σαν στοιχείο του $L_p(\mathbb{T})$).

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι $\sigma_n(f,x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \underset{0}{\hat{f}(k)} e^{ikx} = 0$ για κάθε n.

Άρα, $\|f\|_p = \|0 - f\|_p = \|\sigma_n(f) - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Άρα, $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f \equiv 0$. ∎

Σημαντική παρατήρηση.

Που μπορεί να βοηθήσουν οι $\sigma_n(f,x)$ στο πρόβλημα "$s_n(f,x) \xrightarrow{?} f(x)$";

$$\left[s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} - \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k| \hat{f}(k)}{n+1} e^{ikx} \right]$$

Αν με επιπλέον υποθέσεις για την f, μπορούμε π.χ. να δείξουμε ότι $\sum_{k=-n}^{n} \frac{|k| \hat{f}(k)}{n+1} e^{ikx} \to 0$, έχουμε:

$$\lim s_n(f,x) = \lim \sigma_{n+1}(f,x) = f(x).$$

Abel αθροισιμότητα

- Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει στον s, τότε η $\sigma_n \to s$, όπου $\sigma_n = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n}$. Το αντίστροφο δεν ισχύει!
- Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\overset{\text{στον } s}{,}$ τότε η $\underset{A(r)}{\underset{\parallel}{\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k}}$ συγκλίνει για

κάθε $0<r<1$ και επιπλέον $\lim\limits_{r\to 1^-} A(r) = s$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)r^k = \frac{1}{(r+1)^2} \xrightarrow[r\to 1^-]{} 1/4$.

Ορισμοί:

(α) Η $\sum a_k$ λέγεται Cesàro αθροίσιμη ίσον s αν $\sigma_n = \frac{s_1+\dots+s_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} s$.

(β) Η $\sum a_k$ λέγεται Abel αθροίσιμη αν $\exists \lim\limits_{r\to 1^-} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k r^k$.

$\sum a_k$ συγκλίνει $\xRightarrow{\text{Fejer}}$ $\sum a_k$ Cesàro αθροίσιμη $\xRightarrow{\text{Poisson}}$ $\sum a_k$ Abel αθροίσιμη.

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$.

Θεωρούμε την $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|}\hat{f}(k)e^{ikx} = (f*P_r)(x)$, όπου $P_r(y) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|}e^{iky}$

Πράγματι, $(f*P_r)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(y)P_r(x-y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(y)\sum r^{|k|}e^{ik(x-y)}\,dy$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(y)e^{-iky}\,dy\right)e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|}\hat{f}(k)e^{ikx}.$$

Ο <u>πυρήνας του Poisson</u> είναι η οικογένεια $(P_r)_{0<r<1}$ με $P_r(y) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|}e^{iky} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos y + r^2}$.

Η $(P_r)_{0<r<1}$ είναι καλός πυρήνας καθώς $r \to 1^-$.