Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 20ο (07-05-2015)

Άσκηση 17
(α) $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι $\lim_{t\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|\,d\lambda(x) = 0$.
(β) Δείξτε ότι: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,d\lambda(x) = -\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\frac{\pi}{n})\sin(nx)\,d\lambda(x)$
και συμπεράνατε ότι $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,d\lambda(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Λύση
(α) Έστω $g: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική $\Rightarrow g$ ομοιόμορφα συνεχής.
Έστω $\varepsilon>0$.
Υπάρχει $\delta>0$: αν $|z-x|<\delta$, τότε $|g(z)-g(x)|<\varepsilon/4\pi$
Τότε, αν $0<|t|<\delta$, τότε:
$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(\underbrace{x+t}_{z})-g(x)|\,d\lambda(x) \le \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon}{4\pi}\,d\lambda(x) = 2\pi\cdot\frac{\varepsilon}{4\pi} < \varepsilon.$$
$|z-x|=|t|<\delta$
$< \varepsilon/4\pi$

Έστω $f\in L_1(\mathbb{T})$ και $\varepsilon>0$.
Υπάρχει συνεχής g (2π-περιοδική) τέτοια ώστε
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|\,d\lambda(x) < \varepsilon/3$$
Τότε:
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|\,d\lambda(x) \le \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-g(x+t)|\,d\lambda(x)}_{<\varepsilon/3} + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t)-g(x)|\,d\lambda(x) + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)-f(x)|\,d\lambda(x)}_{<\varepsilon/3}$$
γιατί είναι ίσο μ' αυτό

$$< \frac{2\varepsilon}{3} + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t)-g(x)|\,d\lambda(x).$$
Βρίσκω $\delta>0$: αν $0<|t|<\delta$ τότε $\int |g(x+t)-g(x)| < \varepsilon/3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall\, 0<|t|<\delta$ $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|\,d\lambda(x) < \varepsilon.$

(β) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\frac{\pi}{n})\sin(nx)\,dx$
Έχουμε: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\frac{\pi}{n})\sin(nx)\,dx \overset{y=x+\frac{\pi}{n}}{=\!=} \int_{-\pi+\frac{\pi}{n}}^{\pi+\frac{\pi}{n}} f(y)\sin(ny-\pi)\,dy =$
$= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)(-\sin(ny))\,dy = -\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin(ny)\,dy.$

Αν $A=B$
τότε $A=B=\frac{A+B}{2}$

Τώρα: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) = \dfrac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\frac{\pi}{n})\sin(nx)dx}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) - f(x+\underbrace{\tfrac{\pi}{n}}_{t})\Big)\sin(nx)\,dx$$

Τότε $\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\right| \le \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\frac{\pi}{n}) - f(x)|\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, από το (a) γιατί $t_n = \frac{\pi}{n} \to 0$. □

Άσκηση 12

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-περιοδική, ολοκληρώσιμη σε διαστήματα μήκους 2π.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $M>0$ και $0<a\le 1$:

$\forall x,y \quad |f(x)-f(y)| \le M\cdot|x-y|^a$.

Τότε, $|a_k(f)| \le \frac{C}{k^a}$, $|b_k(f)| \le \frac{C}{k^a}$.

Λύση

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \overset{x=y+\frac{\pi}{k}}{=\!=\!=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-\cancel{\frac{\pi}{k}}}^{\pi-\cancel{\frac{\pi}{k}}} f(y+\tfrac{\pi}{k})\cos(ky+\pi)\,dy =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tfrac{\pi}{k})\cos(kx)\,dx.$$

Άρα, $|a_k(f)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(x+\frac{\pi}{k})|\,|\cos(kx)|\,dx \le$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M\left(\frac{\pi}{k}\right)^a dx = \frac{M\pi^a}{k^a}$$

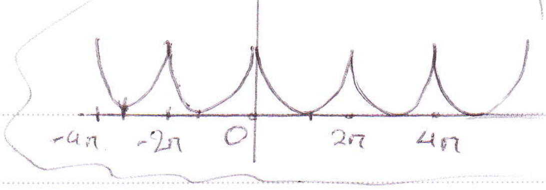
$M\pi^a \to C$ □

Σημείωση για αλλαγή μεταβλητής:

Θέλω $\int f(x)\,d\lambda = \int f(x-y)\,d\lambda$

Παίρνω $f=\chi_A$ τότε $\int f\,d\lambda = \lambda(A)$

$\int f(x-y)\,d\lambda = \lambda(y+A) = \lambda(A)$



Άσκηση 11

$f(x)=(\pi-x)^2$ στο $[0,2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε 2π-περιοδική στο $\mathbb{R}$.

Δείξτε ότι $S(f,x)\sim \frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$ (συγκλίνει; πού;).
και $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Λύση

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx=0 \quad \forall k$ (f άρτια).

(2) $a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\underbrace{\cos kx}_{\text{άρτια}}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}f(x)\cos kx\,dx$

Για $k=0$:

$$a_0(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2dx=-\frac{2}{\pi}\frac{(\pi-x)^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3}=\frac{2\pi^2}{3}.$$

Για $k>0$:

$$a_k(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\cos kx\,dx=\cancelto{0}{\frac{2}{\pi}(\pi-x)^2\frac{\sin(kx)}{k}\Big|_0^{\pi}}+\frac{2}{\pi}\frac{2}{k}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin(kx)\,dx=$$

$$=-\frac{4}{\pi k}(\pi-x)\frac{\cos(kx)}{k}\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\frac{2}{k^2}\int_0^{\pi}\cos(kx)\,dx.$$

$$=\frac{4\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}k^2}-\frac{2}{\pi}\cancelto{0}{\frac{2}{k^2}\frac{\sin(kx)}{k}\Big|_0^{\pi}}=\frac{4}{k^2}.$$

Άρα:

$$S(f,x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+\cancelto{0}{b_k\sin kx}\right)=$$
$$=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}.$$

Έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\underbrace{|a_k|}_{\frac{4}{k^2}}+\cancel{|b_k|}\right)<\infty$ και η f συνεχής $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_n(f,x)\xrightarrow{\text{ομ.}}f(x)$.

Άρα, $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$.

Βάζουμε $x=0$:

$$\pi^2=f(0)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\Rightarrow 4\sum\frac{1}{k^2}=\frac{2\pi^2}{3}\Rightarrow\boxed{\sum\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}}\quad\square$$

Παρατήρηση

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|+|b_k|\right)<\infty \iff \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(k)|<\infty .$$

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{f}(k)=\dfrac{a_k+ib_k}{2} \Rightarrow |\hat{f}(k)|\leq \dfrac{|a_k|+|b_k|}{2} \\ \hat{f}(-k)=\dfrac{a_k-ib_k}{2} \Rightarrow |\hat{f}(-k)|\leq \dfrac{|a_k|+|b_k|}{2} \end{array}\right. , \quad k=1,2,\dots \Bigg\} \ (\Rightarrow)$$

$$\left\{ |\hat{f}(k)|=\frac{1}{2}\sqrt{a_k^2+b_k^2}\geq \frac{|a_k|}{2}, \quad \frac{|b_k|}{2} \right\} \ (\Leftarrow)$$

Άσκηση 3

(α) Δείξτε ότι $\{e^{ikx}, k\in\mathbb{Z}\}$ είναι γρ. ανεξάρτητο (πάνω από το $\mathbb{C}$)

(β) Αν $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n$ διαφορετικά ανά δύο (στο $\mathbb{R}$). Είναι το $\{e^{i\mu_1 x},\dots,e^{i\mu_n x}\}$ γρ. ανεξάρτητο (πάνω από το $\mathbb{C}$);

Λύση

(α) Έστω $a_1e^{ik_1x}+\dots+a_ne^{ik_nx}\equiv 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\left(a_1e^{ik_1x}+\dots+a_ne^{ik_nx}\right)e^{-ik_1x}\,dx=0 \Rightarrow$$

Αν $m\in\mathbb{Z}$, $m\neq 0$: $\int_{-\pi}^{\pi}e^{imx}dx=\dfrac{e^{imx}}{im}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}a_1\,dx+a_2\cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi}e^{\overset{\neq 0}{i(k_2-k_1)}x}dx}+\dots+a_n\cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi}e^{\overset{\neq 0}{i(k_n-k_1)}x}dx}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi a_1=0 \Rightarrow \boxed{a_1=0}.$$ Ομοίως και τα υπόλοιπα.

(β)

παρ. $a_1e^{i\mu_1x}+\dots+a_ne^{i\mu_nx}=0$

παρ. $\mu_1a_1e^{i\mu_1x}+\dots+\mu_na_ne^{i\mu_nx}=0$

$\mu_1^2a_1e^{i\mu_1x}+\dots+\mu_n^2a_ne^{i\mu_nx}=0$

$\vdots$

παρ. $\mu_1^{n-1}a_1e^{i\mu_1x}+\dots+\mu_n^{n-1}a_ne^{i\mu_nx}=0$

Για $x=0$:
$$\begin{aligned} a_1+\dots+a_n&=0\\ \mu_1a_1+\dots+\mu_na_n&=0\\ &\ \vdots\\ \mu_1^{n-1}a_1+\dots+\mu_n^{n-1}a_n&=0 \end{aligned}$$

Αφού $\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n\\ \vdots & & & \vdots \\ \mu_1^{n-1} & \mu_2^{n-1} & \dots & \mu_n^{n-1}\end{vmatrix}}_{\text{Ορίζουσα Vandermondt}}\neq 0$, τότε $a_1=a_2=\dots=0$. □

Άσκηση 6

$f\in L_1(\mathbb{T})$
(a) f άρτια $\Rightarrow \hat{f}(\kappa)=\hat{f}(-\kappa)\ \ \forall\kappa$.
(b) f περιττή $\Rightarrow -\hat{f}(\kappa)=\hat{f}(-\kappa)\ \ \forall\kappa$.
(γ) Αν $f(x+\pi)=f(x) \Rightarrow \hat{f}(\kappa)=0$ αν κ περιττός ακέραιος.
(δ) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές, τότε:
$$\overline{\hat{f}(\kappa)}=\hat{f}(-\kappa)\quad \forall\kappa\in\mathbb{Z}.$$
Αν η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

Λύση

(δ) Έχουμε: $\overline{\int f}=\overline{\int (u+iv)}=\overline{\int u+i\int v}=\int u-i\int v=\int(u-iv)=\int \bar{f}$.

Τώρα:
$$\overline{\hat{f}(\kappa)}=\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-i\kappa x}dx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(x)}\,\overline{e^{-i\kappa x}}dx\overset{f(x)\in\mathbb{R}}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{i\kappa x}dx=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-i(-\kappa)x}dx=\hat{f}(-\kappa).$$

f ~~συνεχής~~ και $\overline{\hat{f}(\kappa)}=\hat{f}(-\kappa)\ \ \forall\kappa$.
Θα δείξουμε ότι $\hat{\bar{f}}(\kappa)=\hat{f}(\kappa)\ \ \forall\kappa\in\mathbb{Z}$.
(έχω τις συνεχείς f και $\bar{f}$ να έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier $\xRightarrow[\text{Θ. μοναδ.}]{} f=\bar{f} \Rightarrow f(x)\in\mathbb{R}$.

Έχουμε $\underset{\substack{\|(\text{υπόθ})\\ \hat{f}(-\kappa)}}{\overline{\hat{f}(\kappa)}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(x)}e^{-i(-\kappa)x}dx=\hat{\bar{f}}(-\kappa)$

Άρα, $\hat{f}(-\kappa)=\hat{\bar{f}}(-\kappa)\ \ \forall\kappa\in\mathbb{Z}$. □

Άσκηση 9

Αν $\|f_n-f\|_1\to 0$, τότε $\hat{f}_n(\kappa)\xrightarrow[\text{ως προς }\kappa]{\text{ομ.}}\hat{f}(\kappa)$.

Λύση

$$|\hat{f}_n(\kappa)-\hat{f}(\kappa)|\le\frac{1}{2\pi}\int|f_n(x)-f(x)|\cancel{|e^{-i\kappa x}|}^{1}dx=\|f_n-f\|_1\to 0.\quad □$$

Άσκηση 15

$f(x)=|x|$ στο $[-\pi,\pi]$, την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά. Υπολόγισε την $S(f)$, εξέτασε αν $S(f)\to f$ κλπ.

Λύση

$$\hat f(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|e^{-ikx}\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}xe^{-ikx}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}xe^{-ikx}\,dx$$

• $$\int_0^\pi xe^{-ikx}\,dx = x\left(-\frac{e^{-ikx}}{ik}\right)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{e^{-ikx}}{ik}\,dx = \frac{-\pi e^{ik\pi}}{ik} - \frac{e^{ikx}}{(ik)^2}\Big|_0^\pi =$$

$$= -\frac{\pi e^{-ik\pi}}{ik} - \frac{e^{-ik\pi}}{(ik)^2} + \frac{1}{(ik)^2}$$

• $$\int_{-\pi}^0 xe^{-ikx}\,dx = x\cdot\left(-\frac{e^{-ikx}}{ik}\right)\Big|_{-\pi}^0 - \frac{e^{-ikx}}{(ik)^2}\Big|_{-\pi}^0 =$$

$$= \frac{\pi e^{+ik\pi}}{ik} - \frac{1}{(ik)^2} + \frac{e^{ik\pi}}{(ik)^2}$$

Αφαιρώντας έχουμε:

$$\hat f(k) = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2}{(ik)^2} + \frac{2e^{ik\pi}}{(ik)^2}\right) = \frac{2}{2\pi k^2}\left(e^{ik\pi}-1\right) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi k^2}, & k \text{ περιττός} \\ 0, & k \text{ άρτιος} \end{cases}$$

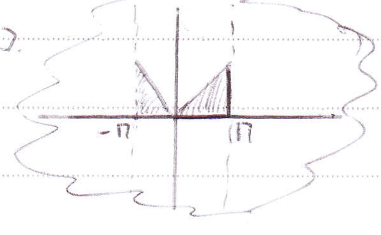
Έχουμε: $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat f(k)| = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)^2} + |\hat f(0)| < \infty.$$

Άρα:

$$S_n(f,x) \xrightarrow{\text{ομ}} f(x) \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad \underset{|x|,\ x\in[-\pi,\pi]}{\underset{\parallel}{f(x)}} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}e^{ikx},$$

αφού:

$$\hat f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}.$$



Για $x=0$:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Άρα:

$$X = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}X \Rightarrow \frac{3}{4}X = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \boxed{X = \frac{\pi^2}{6}}$$

$\square$