Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 18ο (05-05-2015)

Παράδειγμα (Lebesgue)

Υπάρχει $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$ συνεχής τέτοια ώστε:

$$\limsup_n |s_n(f,0)| = +\infty.$$

Λήμμα

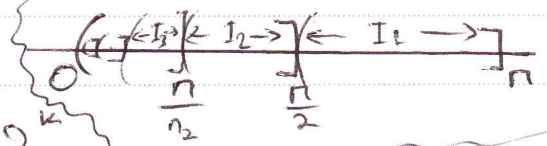
Έχουμε $s_n(f,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt$

Αν η $\{s_n(f,0)\}$ είναι φραγμένη, τότε:

η $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(nt)}{t}\,dt$ είναι φραγμένη.

Ορίζουμε $f:(0,\pi]\to\mathbb{R}$ της μορφής $f(t)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\sin(n_k t)\chi_{I_k}(t)$.

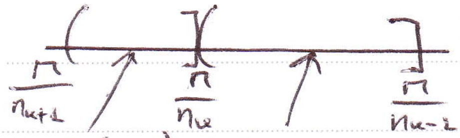
όπου θα επιλέξουμε:



- $c_1=1$, $0<c_k\le 1$, $c_k\downarrow 0$
- $n_0=1$, $n_1=2$, $n_k=n_{k-1}\cdot N_k$, $N_k\ge 2^k$.
- $I_k=\left(\frac{\pi}{n_k}, \frac{\pi}{n_{k-1}}\right]$ (Ειδικότερα $I_1=(\frac{\pi}{2},\pi]$

Θέτουμε $f(0)=0$ και επεκτείνουμε την f στο $[-\pi,0)$ ώστε να γίνει άρτια.

$\Rightarrow$ Η υπόθεση ότι $n_{k-1}\,|\,n_k$ εξασφαλίζει τη συνέχεια της f στα σημεία $\frac{\pi}{n_k}$:



$f(t)=c_{k+1}\sin(n_{k+1}t)$ $f(t)=c_k\sin(n_k t)$

$\lim_{t\to\frac{\pi}{n_k}^+} f(t)=c_k\sin(n_k\cdot\frac{\pi}{n_k})=0.$

$\lim_{t\to\frac{\pi}{n_k}^-} f(t)=c_{k+1}\sin(\overset{N_k}{n_{k+1}\frac{\pi}{n_k}})=0.$

$\to$ Η υπόθεση ότι $c_k\downarrow 0$ εξασφαλίζει τη συνέχεια στο 0:

Για $0<x<\frac{\pi}{n_k}$ έχουμε $x\in I_s$, $s>k$

$\Rightarrow |f(x)|=|c_s\sin(n_s x)|\le c_s\le c_k\to 0.$

Άρα, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0).$

Έστω ότι έχουμε ορίσει την $\varphi(t)=\sum_{j=1}^{k} c_j \sin(n_j t)\chi_{I_j}(t)$

Παρατήρηση: Η $\frac{\varphi(t)}{t}$ είναι φραγμένη:

- Αν $0<t\leq \frac{\pi}{n_k}$, τότε $\varphi(t)=0 \Rightarrow \frac{\varphi(t)}{t}=0$
- Αν $\frac{\pi}{n_k}<t\leq \pi$, τότε $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right|\leq \frac{n_k}{\pi}\cdot c_1$ $\left(|c_j\sin(n_j t)|\leq |c_j|\leq c_1\right)$

Άρα, από το λήμμα Riemann - Lebesgue,
$\int^{\pi} \frac{\varphi(t)}{t}\sin(mt)\,dt \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$.

Άρα, μπορώ να βρω $n_{k+1}=n_k \cdot N_{k+1}$, $N_{k+1}\geq 2^{k+1}$, ώστε
$\left|\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{t}\sin(n_k t)\,dt\right|<1$

Θα δείξουμε ότι αν επιλεγούν κατάλληλα τα c_k, τότε: $\int_0^{\pi} f(t)\frac{\sin(n_k t)}{t}\,dt \longrightarrow +\infty$ (αυτό δείχνει ότι $\limsup_n |s_n(f,0)|=+\infty$).

Γράφουμε:

$$I_k=\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{n_k}}\frac{f(t)}{t}\sin(n_k t)\,dt}_{A_k}+\underbrace{\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}}\frac{f(t)}{t}\sin(n_k t)\,dt}_{B_k}+\underbrace{\int_{\frac{\pi}{n_{k-1}}}^{\pi}\frac{f(t)}{t}\sin(n_k t)\,dt}_{\Gamma_k}$$

- $|\Gamma_k|<1$, γιατί $\left|\int_{\frac{\pi}{n_{k-1}}}^{\frac{\pi}{n_k}}\frac{f(t)}{t}\sin(n_k t)\,dt\right|=\left|\int_{\frac{\pi}{n_{k-1}}}^{\frac{\pi}{n_k}}\frac{\overset{\varphi}{\sum_{j=1}^{k-1}c_j\sin(n_j t)\chi_{I_j}(t)}}{t}\sin(n_k t)\right| \underset{\text{γιατί έτσι επιλέξαμε το } n_k}{\overset{(2)}{<}} 1$

- $|A_k|=\left|\int_0^{\frac{\pi}{n_k}}\frac{f(t)}{t}\sin(n_k t)\,dt\right|\leq \int_0^{\frac{\pi}{n_k}}\frac{\overset{\leq 1}{|f(t)|}}{t}|\sin(n_k t)|\,dt\leq \int_0^{\frac{\pi}{n_k}}\frac{1}{t}n_k t\,dt=\pi$

- $B_k=\int_{I_k}\frac{\overset{f(t)}{c_k\cdot\sin(n_k t)}}{t}\cdot\sin(n_k t)=c_k\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}}\frac{1-\cos(2n_k t)}{2t}\,dt=$

$$=\frac{c_k}{2}\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}}\frac{dt}{t}-\frac{c_k}{2}\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}}\frac{\cos(2n_k t)}{t}\,dt=$$

$$=\frac{c_k}{2}\ln\left(\frac{n_k}{n_{k-1}}\right)-\frac{c_k}{2}\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}}\frac{1}{t}\left(\frac{\sin(2n_k t)}{2n_k}\right)'dt=$$

$$=\underbrace{\frac{c_k}{2}\ln(N_k)}_{\to\infty}-\cancel{\left[\frac{c_k}{2}\frac{\sin(2n_k t)}{2n_k t}\right]_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}}}-\frac{c_k}{2}\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}}\frac{\sin(2n_k t)}{2n_k t^2}\,dt.$$

Άρα, $B_k = \frac{c_k}{2}\ln(N_k) - \underbrace{\frac{c_k}{2}\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \frac{\sin(2n_k t)}{2n_k t^2}\,dt}_{B_k'}$

Φράσσουμε το $|B_k'| \le \frac{c_k}{2}\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \frac{1}{2n_k t^2}\,dt = \left[\frac{c_k}{4n_k}\left(-\frac{1}{t}\right)\right]_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} =$

$= \frac{c_k}{4n_k}\cdot\frac{n_k}{\pi} - \frac{c_k}{4n_k}\cdot\frac{n_{k-1}}{\pi} \le \frac{1}{4\pi}$

και $\frac{c_k}{2}\ln(N_k) \longrightarrow \infty$ αν πάρουμε π.χ. $c_k = \frac{1}{\sqrt{\ln(N_k)}} \to 0$ ∎

Θεώρημα Dini

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $x \in \mathbb{T}$ και για κάποιον $a \in \mathbb{C}$ ισχύει:

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - a\right|\frac{dt}{t} < \infty.$$

Τότε, $S_n(f,x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Θεώρημα ("Θετική" συνέπεια)

Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{T}$, τότε:

$S_n(f,x) \longrightarrow f(x)$.

Απόδειξη

Θέτουμε $a = f(x)$.

Γνωρίζουμε αν υπάρχει η $f'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$.

Άρα μπορούμε να βρούμε $0<\delta<\pi$ και $M>0$:

Αν $0<|t|<\delta$, τότε: $\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| \le M \Rightarrow |f(x+t)-f(x)| \le M|t| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Για κάθε $0<t<\delta \longrightarrow |f(x+t)-f(x)| \le Mt$

$\xrightarrow{-t\ \text{στο}\ t} |f(x-t)-f(x)| \le Mt$

Δηλαδή, $\forall t \in (0,\delta)$:

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right| \le \frac{|f(x+t)-f(x)|+|f(x-t)-f(x)|}{2} \le Mt.$$

Τότε, $\displaystyle\int_0^{\pi} \left| \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x) \right| \frac{dt}{t} \leq$

$$\leq \underbrace{\int_0^{\delta} M t^{\alpha} \cdot \frac{1}{t}\, dt}_{M\delta} + \frac{1}{\delta}\int_{\delta}^{\pi} \underbrace{\left| \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right|}_{\text{ολοκληρώσιμη}} dt < \infty .$$

Από το Θεώρημα του Dini,

$s_n(f,x) \longrightarrow f(x)$, δηλαδή $\displaystyle f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$ ■

<u>Θεώρημα</u> (αρχή της τοπικότητας, Riemann)

Έστω $f, g \in L_1(\mathbb{T})$ και έστω $x \in \mathbb{T}$ με την ιδιότητα:

"$\exists \delta > 0: f(y) = g(y) \ \forall y \in (x-\delta, x+\delta)$".

Τότε, $s_n(f,x) - s_n(g,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Δηλαδή, η $s_n(f,x) \longrightarrow u \iff$ η $s_n(g,x) \longrightarrow v$ και $v = u$.

<u>Απόδειξη</u>

Έχουμε $s_n(f,x) - s_n(g,x) = s_n(\underbrace{f-g}_{h}, x)$.

Έχουμε $h(y) = f(y) - g(y) = 0$ στο $(x-\delta, x+\delta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists h'(x) = 0$.

Από το προηγούμενο Θεώρημα (για την h στο x)

$s_n(h,x) \longrightarrow h(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow s_n(f,x) - s_n(g,x) \to 0$. ■

<u>Παρατήρηση</u>

$$s_n(f,x) - s_n(g,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} - \sum_{k=-n}^{n} \hat{g}(k) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} (\hat{f}(k) - \hat{g}(k)) e^{ikx}$$

όπου: $\displaystyle \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy$, $\displaystyle \hat{g}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{-iky} dy$,

δηλαδή η συμπεριφορά τους εξαρτάται από όλο το διάστημα, όχι μόνο το τοπικό του x.

Απόδειξη (του Dini)

Θυμόμαστε ότι $s_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot D_n(x-t)\,dt =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\cdot D_n(t)\,dt.$$

Ορίζουμε $D_n^*(t) = \frac{D_n(t)+D_{n-1}(t)}{2} = \frac{\sin(nt)}{\tan\frac{t}{2}}$ και

$$s_n^*(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,D_n^*(t)\,dt$$

$$\frac{D_n(t)-D_{n-1}(t)}{2} = \frac{e^{int}+e^{-int}}{2} = \cos(nt)$$

Τότε, $s_n(f,x) - s_n^*(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\left(D_n(t)-D_n^*(t)\right) =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\cdot\cos(nt)\,dt \longrightarrow 0.$$

Γράφουμε $s_n^*(f,x) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-t)D_n^*(t)\,dt}_{-t=s} + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)\,D_n^*(t)\,dt$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,D_n^*(t)\,dt$$

Γράφουμε: $a = a\cdot 1 = a\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n^*(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} a\,D_n^*(t)\,dt$

Έχουμε: $s_n^*(f,x) - a = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - a\right)\frac{\sin(nt)}{\tan\frac{t}{2}}\,dt$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-a\right)\frac{2}{t}\sin(nt)\,dt}_{\text{ολοκληρώσιμη από την υπόθεση}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-a\right)\left(\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}-\frac{2}{t}\right)}_{\text{ολοκληρώσιμη} \times \text{φραγμένη}}\sin(nt)\,dt$$

$\xrightarrow{(R-L)} 0$ $\qquad\qquad$ $\longrightarrow 0$