Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 17ο (30-04-2015)

Συνεχείς συναρτήσεις με αποκλίνουσα (σε ένα σημείο) σειρά Fourier.

- $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$

- $L_n = \|D_n\|_1$ – η n-οστή σταθερά Lebesgue
  $\|D_n\|_1 \sim \frac{4}{\pi^2}\ln n$
  $\exists c_1, c_2 > 0: \forall n \geq 2 \quad c_1 \ln n \leq \|D_n\|_1 \leq c_2 \ln n$.

- Αν $f \in L_1(\mathbb{T})$, τότε:
  $s_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot D_n(x-t)\,dt = (f * D_n)(x)$.

Θεώρημα
Υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\limsup_{n\to\infty}|s_n(f,0)| = +\infty$
(Άρα, $s_n(f,0) \not\to f(0)$).

Θεώρημα Banach-Steinhaus

Λήμμα: Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος.
Έστω $f_n : (X,d) \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, με την εξής ιδιότητα: $\forall x \in X \quad \sup_n |f_n(x)| < \infty$.
Τότε, $\exists x_0 \in X, r > 0, M > 0 : \forall x \in B(x_0,r) \ \forall n \in \mathbb{N} \ |f_n(x)| \leq M$.

Απόδειξη: $\forall k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε: $F_k = \{x \in X : \forall n \in \mathbb{N} \ |f_n(x)| \leq k\} =$
$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in X : |f_n(x)| \leq k\}}_{\text{κλειστό, } f_n \text{ συνεχής}} =$ κλειστό

Παρατηρούμε ότι: $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ (Έστω $x \in X$. Η $f(x)$ είναι

φραγμένη $\Rightarrow \exists k=k_x : \forall n \quad |f_n(x)| \le k \Rightarrow x \in F_{k_x} \subseteq \bigcup F_k$].
Από το Θεώρημα Baire, $\exists k_0 : int(F_{k_0}) \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x_0 \in X \quad \exists r>0 : \quad B(x_0, r) \subseteq F_{k_0}$
Τότε, $\forall x \in B(x_0,r) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x)| \le k_0 := M$ ■

<u>Χώρος Banach</u> είναι ένας χώρος με νόρμα, που είναι πλήρης ως προς την επαγόμενη μετρική. Εμάς μας ενδιαφέρει ο $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.

<u>Ορισμός</u> (φραγμένος γραμμικός τελεστής).
X, Y χώροι με νόρμα.
Μια συνάρτηση $T : X \to Y$ λέγεται:
(α) <u>γραμμικός τελεστής</u> αν $\forall x_1, x_2 \in X \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}$
$$T(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1T(x_1) + a_2T(x_2)$$
(β) <u>φραγμένος γραμμικός τελεστής</u> αν επιπλέον υπάρχει $M>0 : \forall x \in X \quad \|Tx\|_Y \le M\|x\|_X$

⊛ Τότε η T είναι είναι συνεχής συνάρτηση:
$\forall x, z \in X \quad \|Tx - Tz\|_Y = \|T(x-z)\|_Y \le M\|x-z\|_X$, άρα η T είναι Lipschitz συνεχείς.

<u>Θεώρημα Banach-Steinhaus</u> (αρχή ομοιόμορφου φραγμένου).
Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα.
Έστω (T_n) μια ακολουθία από φραγμένους γραμμικούς τελεστές $T_n : X \to Y$ με την εξής ιδιότητα:
$$\forall x \in X \quad \sup_n \|T_n(x)\| < \infty.$$
Τότε, οι T_n είναι <u>ομοιόμορφα φραγμένοι</u>:
$$\exists M>0 : \forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|T_nx\|_Y \le M\|x\|_X$$

Απόδειξη:

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n: X\to\mathbb{R}$ με $f_n(x)=\|T_n x\|_Y$

• Η f_n είναι συνεχής: αν $x,z\in X$, τότε

$$|f_n(x)-f_n(z)| = \big|\,\|T_n x\|_Y - \|T_n z\|_Y\big| \le$$

$$\le \|T_n x - T_n z\|_Y = \|T_n(x-z)\|_Y \le M_n\|x-z\|_X,$$ άρα η f_n είναι Lipschitz με σταθερά M_n.

• Επίσης, $\forall x\in X$ $\sup_n|f_n(x)| = \sup_n\|T_n x\|_Y < \infty$

Αφού ο X είναι πλήρης, το λήμμα μας δίνει μια μπάλα $\bar{B}(x_0,r)=\{x\in X: \|x-x_0\|_X\le r\}$ και ένα $M>0$:

$$\forall x\in\bar{B}(x_0,r)\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad |f_n(x)|=\|T_n x\|_Y\le M$$

$f_n: X\to\mathbb{R}$
$\forall x$ $\sup|f_n(x)|<\infty$
$\exists B(x_0,r)$: $\exists M>0$
$\forall x\in \uparrow$ $\forall n$ $|f_n(x)|<M$

Έστω $x\in X$.

Τότε $x_0\in\bar{B}(x_0,r)$ και $x_0+\frac{r}{2}\cdot\frac{x}{\|x\|_X}\in\bar{B}(x_0,r)$

(διότι, $\|\cancel{x_0}+\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|}-\cancel{x_0}\| = \frac{r}{2}\frac{\cancel{\|x\|}}{\cancel{\|x\|}}<r$).

Έχουμε: $T_n(x)=\frac{2\|x\|_X}{r}T_n\left(\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|_X}\right)=\frac{2\|x\|_X}{r}T_n(y-x_0)=\frac{2\|x\|_X}{r}(T_n(y)-T_n(x_0))$

$$\Rightarrow \|T_n(x)\|_Y = \frac{2\|x\|_X}{r}\|T_n(y)-T_n(x_0)\|_Y \le \frac{2\|x\|_X}{r}\big(\underbrace{\|T_n y\|_Y}_{\le M}+\underbrace{\|T_n x_0\|_Y}_{\le M}\big)\le\frac{4M}{r}\|x\|_X$$

∎

Πώς θα χρησιμοποιήσουμε το Θ. Banach-Steinhaus

$X=(C(\mathbb{T}),\|\cdot\|_\infty)$

$Y=\mathbb{C}$

$T_n: C(\mathbb{T})\to\mathbb{C}$, $\quad T_n(f)=s_n(f,0)$

• Ισχύει, π.χ., $s_n(f+g,0)=\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f+g}(k)e^{ik0}=\sum_{k=-n}^{n}(\hat{f}(k)+\hat{g}(k))=s_n(f,0)+s_n(g,0)$

Άρα, κάθε T_n είναι γραμμικός τελεστής (συναρτησοειδές).

• Κάθε T_n είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής:

Έστω $f\in C(\mathbb{T})$.

Τότε, $|T_n(f)|=|s_n(f,0)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(\overset{t}{\cancel{0-t}})\,dt\right|\le$ $\quad D_n$ άρτια

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{|f(t)|}_{\le\|f\|_\infty}\cdot|D_n(t)|\,dt\le\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt\right)\cdot\|f\|_\infty=L_n\cdot\|f\|_\infty\le\underbrace{c_2\ln n}_{M_n}\cdot\|f\|_\infty$$

<u>Παρατήρηση</u>
Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$, η $\{s_n(f,0)\}$ είναι φραγμένη, δηλαδή $\forall f \in C(\mathbb{T})$, $\sup_n |T_n(f)| < \infty$.
(*) Τότε, από Θ. Banach-Steinhaus, θα υπάρχει (ένας) $M > 0$:
$\forall f \in C(\mathbb{T})$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad |T_n(f)| = |s_n(f,0)| \leq M \cdot \|f\|_\infty$

<u>Λήμμα</u>
Για κάθε n, $\sup\{|s_n(f,0)| : f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leq 1\} = L_n$.

Μετά από το λήμμα:
Έστω ότι ισχύει η (*).
Από το λήμμα, $\forall n \geq 2$ υπάρχει $f_n \in C(\mathbb{T})$ με
$\|f_n\|_\infty \leq 1$ και $|s_n(f,0)| > L_n - \varepsilon$
Όμως $|s_n(f,0)| \leq M \cdot \|f_n\|_\infty \leq M$
Άρα, $L_n < M + \varepsilon$ $\forall n$, άτοπο, γιατί $L_n \geq c_1 \ln n \to \infty$.

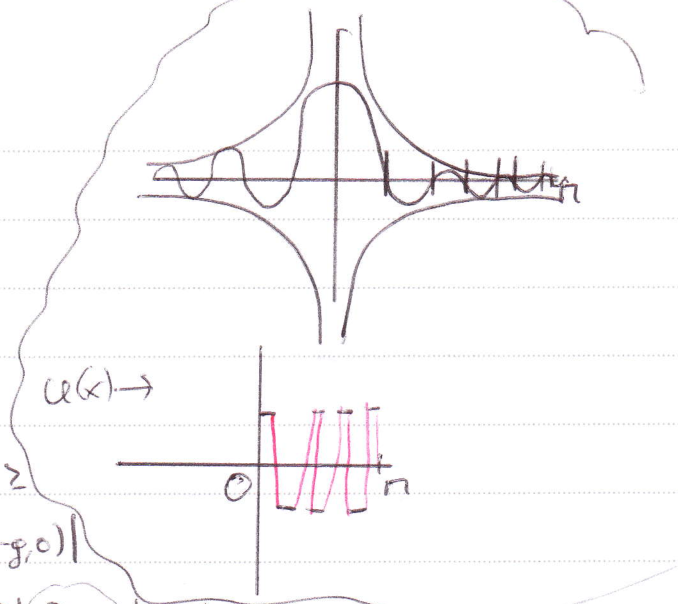
<u>Απόδειξη λήμματος</u>
$\supseteq$ Έχουμε δείξει ότι $\forall f \in C(\mathbb{T})$ $|s_n(f,0)| \leq L_n \cdot \|f\|_\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup\{|s_n(f,0)| : f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leq 1\} \leq L_n$

$\supseteq$ Για την αντίστροφη, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και θα βρούμε $g \in C(\mathbb{T})$, $\|g\|_\infty \leq 1$, ώστε $|s_n(g,0)| > L_n - \varepsilon$
Παρατήρηση: για την $u = \operatorname{sgn} D_n(x) = \begin{cases} 1, & D_n(x) > 0 \\ 0, & D_n(x) = 0 \\ -1, & D_n(x) < 0 \end{cases}$ έχουμε:

$$s_n(u,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{u(t) \cdot D_n(t)}_{|D_n(t)|}\, dt = \|D_n\|_1 = L_n$$

Επιπλέον, $\|u\|_\infty = 1$.

Η u δεν είναι συνεχής, είναι όμως ολοκληρώσιμη $\Rightarrow$ $\exists$ συνεχής g: $\|g\|_\infty \leq 1$ και $\|u-g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2(2n+1)}$.



Τότε, $|s_n(g,0)| = |s_n(u,0) - s_n(u-g,0)| \geq$
$\geq |s_n(u,0)| - |s_n(u-g,0)| = L_n - |s_n(u-g,0)|$

Όμως, $|s_n(u-g,0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)-g(x)| \underbrace{D_n(x)}_{\leq 2n+1} dx \leq$
$\leq (2n+1)\cdot\|u-g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ ■

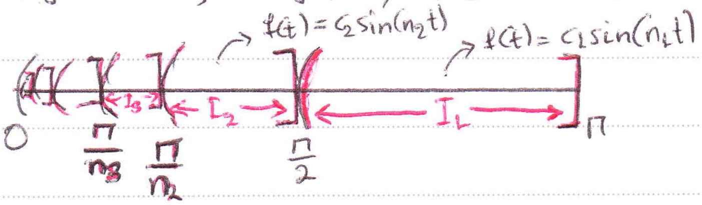
Κατασκευαστική απόδειξη (Lebesgue)

Θα φτιάξουμε μια συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$: $\limsup_n |s_n(f,0)| = +\infty$

$\supset$ Η f θα είναι άρτια, οπότε την ορίζουμε μόνο στο $(0,\pi]$

Θα είναι της μορφής: $f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sin(n_j t)\chi_{I_j}(t)$, $f(0)=0$.

(α) $I_j = \left(\frac{\pi}{n_j}, \frac{\pi}{n_{j-1}}\right]$, $n_0 = 1$, $n_1 = 2$, $(n_j)\nearrow$, $n_{k+1} = n_k\cdot N_k$, $N_k \geq 2^k$.



(β) $c_1 = 1$, $c_j \downarrow 0$

Δηλαδή, $f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sin(n_j t)\chi_{I_j}(t)$, όπου $\left\{\begin{matrix} 0 < c_j \leq 1,\ c_j \downarrow 0 \\ n_0 = 1, n_1 = 2, n_{k+1} = n_k\cdot N_k, \\ N_k \geq 2^k \end{matrix}\right\}$

Παρατηρούμε ότι: αν η $s_n(f,0)$ είναι φραγμένη, τότε και η $\frac{s_n(f,0)+s_{n-1}(f,0)}{2}$ θα είναι φραγμένη.

Έχουμε $B_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t + \sin(n-\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\cos\frac{t}{2}\sin nt}{\sin\frac{t}{2}}dt$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)\sin(nt)\left(\frac{1}{\tan\frac{t}{2}} - \frac{2}{t}\right)}_{\text{φραγμένη} \quad R\text{-}L\ (n\to\infty)\ \to 0} dt}_{\gamma_n} + \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(nt)}{t}dt}_{\delta_n}$$

<u>Λήμμα</u>

Αν η $s_n(f,0)$ είναι φραγμένη, τότε η $\delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin(nt)}{t}\,dt$ είναι φραγμένη.