Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 15ο (28-04-2015).

$f \in L_1(\mathbb{T})$

$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$

$S(f,x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}.$

(1) Λήμμα Riemann-Lebesgue: $\lim_{|k|\to\infty} \hat{f}(k) = 0 \qquad (f \in L_1(\mathbb{T}))$

(2) Αν $f \in C(\mathbb{T})$ και αν $\hat{f}(k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$.

(3) Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$, τότε:

$$\hat{f'}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \ \overset{\text{κατά παράγοντες}}{=\!=\!=} \ (ik)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Δηλαδή: $\hat{f'}(k) = (ik)\hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$

Αν $f \in C^2(\mathbb{T})$, τότε $\hat{f''}(k) = (ik)\hat{f'}(k) = (ik)^2 \hat{f}(k).$

Αν $f \in C^m(\mathbb{T})$, τότε $\hat{f^{(m)}}(k) = (ik)^m \hat{f}(k)$

Πόρισμα

(i) Αν $f \in C^m(\mathbb{T})$, τότε $\exists c > 0$:

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{c}{|k|^m}, \quad k \neq 0 \qquad (\text{μάλιστα: } c = \|f^{(m)}\|_1).$$

(ii) Ακόμα ισχυρότερα, από το Λ. R-L,

$$\lim_{|k|\to\infty} (k^m \hat{f}(k)) = 0.$$

Λήμμα

Έστω $S \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ τριγωνομετρική σειρά και έστω ότι $\|s_n - g\|_1 \to 0$, καθώς $n \to \infty$, όπου $g \in L_1(\mathbb{T})$.

Τότε: $\forall k \in \mathbb{Z} \quad c_k = \hat{g}(k)$

Απόδειξη

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - s_n(x)) e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\underbrace{\sum_{\ell=-n}^{n} c_\ell e^{i\ell x}}_{s_n(x)}\Big) e^{-ikx} dx$$

Αν $n \geq |k|$, τότε $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c_k \cancel{e^{ikx}} \cancel{e^{-ikx}} dx = c_k.$

Άρα, για $n \geq |k|$ έχουμε:

$$\hat{g}(k) - c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - s_n(x))e^{-ikx}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\hat{g}(k) - c_k| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - s_n(x)|\,dx = \|g - s_n\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Άρα $\hat{g}(k) - c_k = 0$. ∎

<u>Πρόταση</u>

Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και έστω ότι $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)| < \infty$.

Τότε, $s_n(f) \xrightarrow{\text{ομ}} f$.

<u>Απόδειξη</u>

Η ακολουθία $s_n(f)$ είναι <u>ομοιόμορφα βασική</u>:

Αν $m > n$, τότε $|s_m(f,x) - s_n(f,x)| = \left|\sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k)e^{ikx} - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx}\right| =$

$$= \left|\sum_{n<|k|\leq m} \hat{f}(k)e^{ikx}\right| \leq \sum_{n<|k|\leq m} |\hat{f}(k)| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Ο $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ είναι <u>πλήρης</u>, άρα $\exists g \in C(\mathbb{T})$:

$$s_n(f) \xrightarrow{\text{ομ}} g.$$

Τότε, $\|s_n(f) - g\|_1 \leq \|s_n(f) - g\|_\infty \to 0$.

Από το λήμμα, οι συντελεστές της $\sum \underbrace{\hat{f}(k)}_{c_k} e^{ikx}$ είναι οι $\hat{g}(k)$.

Δηλαδή $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\hat{f}(k) = \hat{g}(k) \xrightarrow{f,g \text{ συνεχείς}} f = g$. ∎

<u>Πόρισμα</u>

Έστω $f \in C^2(\mathbb{T})$

Τότε: $s_n(f) \xrightarrow{\text{ομ}} f$

Δηλαδή, $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}$ $\forall x$.

Απόδειξη

Υπάρχει $C>0$: $\forall k\neq 0$ $|\hat{f}(k)|\leq \frac{C}{|k|^2}$.

Άρα, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(k)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{k\neq 0}|\hat{f}(k)| \leq |\hat{f}(0)| + 2C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty$ ∎

Σχόλιο: Θα δούμε ότι αν $f\in C^1(\mathbb{T})$, τότε πάλι
$$\sum|\hat{f}(k)| < \infty$$
Επίσης, αν η f είναι Hölder συνεχής με τάξη $a>\frac{1}{2}$, δηλαδή $\forall x,y$ $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|^a$, τότε πάλι $\sum|\hat{f}(k)|<\infty$ (όπου $M>0$ σταθερά).

Ο πυρήνας του Dirichlet

Μας ενδιαφέρουν τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier μιας $f\in L_1(\mathbb{T})$.

Γράφουμε: $s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt\right)e^{ikx} =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n}e^{-ikt}\right)\cdot e^{ikx}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sum_{k=-n}^{n}e^{ik(x-t)}\,dt.$$

Ορισμός

Ο n-οστός πυρήνας του Dirichlet είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο:
$$D_n(y) = \sum_{k=-n}^{n}e^{iky}$$
Με αυτόν τον ορισμό έχουμε:
$$\boxed{s_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cdot D_n(x-t)\,dt = (f*D_n)(x)}$$
όπου, γενικά, αν $f,g\in L_1(\mathbb{T})$, η συνέλιξη $f*g$ των f και g είναι η συνάρτηση $(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(x-t)\,dt$.

Ιδιότητες του πυρήνα του Dirichlet

(α) $D_n(y)\in\mathbb{R}$ για κάθε y.

Έχουμε: $D_n(y) = 1+\sum_{k=1}^{n} (e^{iky}+e^{-iky}) = 1+2\sum_{k=1}^{n} \cos(ky)$.

(β) Η $D_n(y)$ γράφεται σε κλειστή μορφή ως εξής:

$$D_n(y)=\sum_{k=-n}^{n} e^{iky} = e^{-iny}\sum_{k=0}^{2n} e^{iky} = e^{-iny}\frac{e^{i(2n+1)y}-1}{e^{iy}-1} = \frac{e^{i(n+1)y}-e^{-iny}}{e^{iy}-1} =$$

$$= \frac{e^{\frac{iy}{2}}\left(e^{i(n+\frac{1}{2})y}-e^{-i(n+\frac{1}{2})y}\right)}{e^{\frac{iy}{2}}\left(e^{\frac{iy}{2}}-e^{-\frac{iy}{2}}\right)} = \frac{\cancel{2i}\sin(n+\frac{1}{2})y}{\cancel{2i}\sin\frac{y}{2}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}},$$

$0<y<\pi$.

και $D_n(0) = 2n+1 = \lim_{y\to 0}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}$

(γ) Η D_n είναι άρτια: $D_n(y)=D_n(-y)$.

(δ) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(y)\,dy = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e^{iky}\,dy}_{=0 \text{ αν } k\neq 0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i0y}\,dy = 1.$

Δεν ισχύει ότι $D_n(y)\geq 0$.

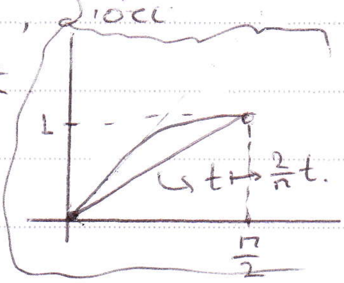
(ε) Οι βασικές ανισότητες:

(ε_1) $|D_n(y)|\leq\sum_{k=-n}^{n}\underbrace{|e^{iky}|}_{=1} = 2n+1$

(ε_2) $|D_n(y)|\leq\frac{\pi}{|y|}$, $0<y<\pi$.

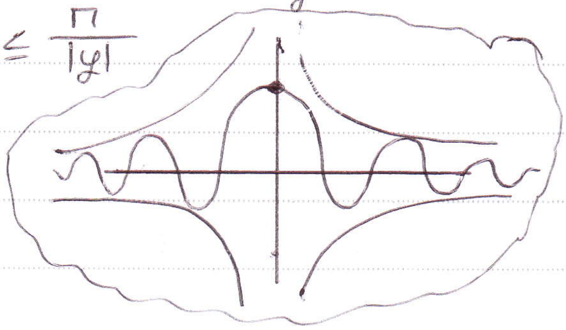
διότι $|D_n(y)| = \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})y|}{\sin\frac{y}{2}} \leq \frac{1}{\sin\frac{y}{2}} \leq \frac{\pi}{y}$, διότι

$\sin\frac{y}{2}\geq\frac{y}{2}\cdot\frac{2}{\pi}$, δηλαδή $\sin t\geq\frac{2}{\pi}t$, $0<\underbrace{t}_{y/2}<\frac{\pi}{2}$



Δηλαδή, γενικά αν $0<|y|<\pi$:

$$|D_n(y)|\leq\frac{\pi}{|y|}$$



Πρόβλημα:

Να εκτιμηθεί η $\|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(y)|\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}|D_n(y)|\,dy =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})y|}{\sin\frac{y}{2}}\,dy.$$

Ορίζουμε $L_n = \|D_n\|_1$ (n-οστή σταθερά Lebesgue)

<u>Θεώρημα</u>

$$L_n \sim \frac{4}{\pi^2} \ln n.$$

<u>Συμβολισμός:</u> Για δύο ακολουθίες a_n, b_n όταν γράφουμε: $a_n \sim b_n$ αν υπάρχει $C>0 : \forall n\ |a_n - b_n| \le C$.
Μερικές φορές γράφουμε και $a_n = b_n + O(1)$.
Αν $a_n - b_n \to 0$ γράφουμε $a_n = b_n + o(1)$.

<u>Απόδειξη</u>

Γράφουμε $L_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin(n+\frac{1}{2})y| \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\sin\frac{y}{2}} - \frac{2}{y}\right)}_{\text{αυτή είναι φραγμένη (άσκηση)}} dy + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})y|}{y} dy.$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})y|}{y} dy \sim \frac{4}{\pi^2} \ln n$$

Θέτοντας $t=(n+\frac{1}{2})y$ θέλουμε το: $\frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{t} dt =$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt + \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt}_{\text{φραγμένο}} + \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{n\pi}^{n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{t} dt}_{\text{φραγμένο}}.$$

Αρκεί $\frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \sim \frac{4}{\pi^2} \ln n$

Γράφουμε $\frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(k\pi+x)|}{k\pi+x} dx$

$$= \underbrace{\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi+x} dx}_{I}.$$

$\forall k$ και $\forall x \in [0,\pi]$ έχουμε: $\frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} \le \frac{|\sin x|}{k\pi+x} \le \frac{|\sin x|}{k\pi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\int_0^{\pi}|\sin x| dx \le \frac{2}{\pi}\sum\int_0^{\pi}\frac{|\sin x|}{k\pi+x}dx \le \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\underbrace{\int_0^{\pi}|\sin x| dx}_{2}$$

Άρα, $\frac{4}{\pi^2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}}_{\sim \ln n} \le I \le \frac{4}{\pi^2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}_{\sim \ln n}$

Γνωρίζουμε ότι $\left|1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right| \le C$.

Άρα $I \sim \frac{4}{\pi^2}\ln n$. $\blacksquare$

Θεώρημα

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει:

$$\sup_{\substack{f\in C(\mathbb{T})\\ \|f\|_\infty\le 1}} |s_n(f,0)| = L_n. \quad (*)$$

(Άρα, $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists f_n\in C(\mathbb{T})$ με $\|f_n\|_\infty \le 1$ τέτοια ώστε:

$$|s_n(f_n,0)| > \frac{L_n}{2} \longrightarrow +\infty. \;(**)).$$

Σχόλια

(*) Έστω $f\in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \le 1$.

Τότε, $|s_n(f,0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\underbrace{D_n(0-t)}_{\text{άρτια}}\,dt\right| \le$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\cdot|D_n(t)|\,dt \le$$

$$\le \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt = \|f\|_\infty\cdot L_n \le L_n.$$

(**) Ορίζουμε $T_n : (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ με $T_n(f) = s_n(f,0)$.

Κάθε T_n είναι γραμμικό συναρτησοειδές και είναι φραγμένο: $\forall f$ $|T_n(f)| = |s_n(f,0)| \le L_n\cdot\|f\|_\infty$.

Ας υποθέσουμε ότι: $\forall f\in C(\mathbb{T})$ η ακολουθία $s_n(f,0)$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $s_n(f,0)$ φραγμένη.

Τότε, $\forall f\in C(\mathbb{T})$ $\sup|\underbrace{T_n(f)}_{= s_n(f,0)}| < \infty$

Θεώρημα Banach-Steinhaus

$\sup_n \|T_n\| < \infty$, όπου $\|T_n\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |T_n(f)| = L_n$

$\Downarrow$

$\sup_n L_n < \infty$

$\downarrow \sim \frac{4}{\pi^2} \ln n$

∞