Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 13ο (21-04-2015)

Σειρές Fourier

- Δουλεύουμε με συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.
Για κάθε x, έχουμε $f(x) = \underbrace{Re f(x)}_{u(x)} + i\,\underbrace{Im f(x)}_{v(x)}$
Δηλαδή, $f = u + iv$, όπου $u, v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

- Η $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ λέγεται ολοκληρώσιμη αν οι $u, v:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, και τότε
$$\int_a^b f\,d\lambda \underset{\text{ορ.}}{=} \int_a^b u\,d\lambda + i\int_a^b v\,d\lambda$$

- Βασική ανισότητα:
Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη $\left(|f(x)| = \sqrt{u^2(x)+v^2(x)}\right)$ και
$$\left|\int_a^b f\,d\lambda\right| \leq \int_a^b |f|\,d\lambda.$$

Απόδειξη:
Έχουμε $\int_a^b f\,d\lambda = Re^{ix_0}$ όπου $R = \left|\int_a^b f\,d\lambda\right|$, $x_0\in\mathbb{R}$.
Τώρα, $\left|\int_a^b f\,d\lambda\right| = R = e^{-ix_0}\int_a^b f\,d\lambda = \int_a^b \underbrace{e^{-ix_0} f}_{\text{μιγ. συνάρτηση}}\,d\lambda \overset{(\in\mathbb{R})}{=\!=} \int_a^b Re(e^{-ix_0}f)\,d\lambda \leq$
$$\leq \int_a^b |e^{-ix_0}f|\,d\lambda = \int_a^b |e^{-ix_0}|\cdot|f|\,d\lambda = \int_a^b 1\cdot|f|\,d\lambda = \int_a^b |f|\,d\lambda. \quad \blacksquare$$

- Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-περιοδική.
Ορίζουμε $T = \{z\in\mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{ix} : x\in\mathbb{R}\}$ $(= [-\pi,\pi) = [0,2\pi))$
Ταυτίζουμε την f με την $F: T\to\mathbb{C}$ που ορίζεται ως εξής: $F(e^{ix}) = f(x)$.
Η F είναι καλά ορισμένη: αν $e^{ix_1} = e^{ix_2}$, τότε $x_2 = x_1 + 2k\pi$ για κάποιο $k\in\mathbb{Z}$. $\xrightarrow{f\ 2\pi\text{-περιοδική}}$ $f(x_2) = f(x_1)$
Αντίστροφα, αν $F: T\to\mathbb{C}$, τότε ορίζουμε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ με

$f(x) = F(e^{ix})$ και αυτή η f είναι 2π-περιοδική:
$f(x+2\pi) = F(e^{i(x+2\pi)}) = F(e^{ix}) = f(x)$.

• Λέμε ότι μια 2π-περιοδική $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη αν είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi)$ (άρα και σε κάθε διάστημα μήκους 2π, άρα και σε κάθε φραγμένο διάστημα).

• <u>Χώροι $L_p(\mathbb{T})$</u>

Λέμε ότι η 2π-περιοδική $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ είναι στον $L_p(\mathbb{T})$, $1\leq p<\infty$ αν $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\,d\lambda(x)<\infty$.

Τότε, ορίζουμε $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^p\,d\lambda\right)^{1/p}$.

Λέμε ότι $f\in L_\infty(\mathbb{T})$ αν υπάρχει $\beta>0$: $\lambda(x\in\mathbb{T}: |f(x)|>\beta\})=0$.

Τότε ορίζουμε: $\|f\|_\infty \underset{\text{ορ.}}{=} \inf\{\beta>0 : \lambda(\{|f|>\beta\})=0\}$.

<u>Ισχυρισμός</u>: Το inf είναι min.

Θεωρούμε $\beta_n \downarrow \|f\|_\infty$

Για κάθε n ισχύει $\lambda(\{|f|>\beta_n\})=0 \Rightarrow \lambda(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|f|>\beta_n\}}_{\{|f|>\|f\|_\infty\}})=0$

Συνεπώς, μπορούμε να γράφουμε:

$|f(x)|\leq\|f\|_\infty$ σχεδόν παντού.

<u>Τριγωνομετρικά πολυώνυμα</u>

(α) <u>Πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο</u> λέμε κάθε συνάρτηση $T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$, με $a_k, b_k\in\mathbb{R}$.

(β) <u>Μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο</u> λέγεται κάθε συνάρτηση $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, όπου $c_k\in\mathbb{C}$.

(Όλες αυτές είναι 2π-περιοδικές).

Βασική παρατήρηση

(β) Στη μιγαδική περίπτωση: $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x) e^{-ikx} dx$.

(α) Στην πραγματική περίπτωση:

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\cos kx\, dx, & k \geq 0 \\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\sin kx\, dx, & k \geq 1. \end{cases}$$

Απόδειξη:

(β) Ισχύει ότι: $\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx = \begin{cases} 2\pi, & m=0 \\ 0, & m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \end{cases}$, γιατί: (αν $m\neq 0$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{imx}}{im}\right)' dx = \left[\frac{e^{imx}}{im}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{im\pi}-e^{-im\pi}}{im} = 0$$

Έστω $|k|\leq n$

Άρα, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{s=-n}^{n} c_s e^{isx}\right) e^{-ikx} dx =$

$$= \sum_{s=-n}^{n} c_s \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k)x} dx \underset{s=k}{=} c_k \cancel{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{0} dx}^{\,1}$$

Συμπέρασμα:

Αν p είναι μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού n, τότε:

$$p(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{p}(k) e^{ikx}, \quad \text{όπου} \quad \hat{p}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x) e^{-ikx} dx$$

[Αν πάρω f συνεχή 2π-περιοδική και αν ορίσω $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ είναι σωστό ότι $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$;]

Ορισμός

Έστω $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη ($f \in L_1(\mathbb{T})$)

Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad \left(\text{υπάρχει γιατί } \int_{-\pi}^{\pi} |f| d\lambda < \infty\right)$$

• Η σειρά Fourier της f είναι η σειρά συναρτήσεων:

$$S(f,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

η οποία μπορεί, για δοσμένο x, να συγκλίνει ή να αποκλίνει.

⇒ Το <u>n-οστό άθροισμα</u> της σειράς Fourier $S(f)$ είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο $S_n(f,x)=\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikx}$

⇒ Οι <u>συντελεστές Fourier</u> της f είναι οι $\hat{f}(k)$, $k\in\mathbb{Z}$

<u>Παρατήρηση</u>

Η $\{\hat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ είναι φραγμένη

$$|\hat{f}(k)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx\right|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)||e^{-ikx}|dx=\|f\|_1$$

<u>Πρόβλημα 1:</u>

Λέμε ότι η $S(f)$ συγκλίνει στο σημείο x, αν υπάρχει

$s(x)$: $S_n(\ \ )\longrightarrow s(x)$

Είναι σωστό π.χ. ότι η $S(f,x)$ συγκλίνει σ.π.;

Κάτω από ποιες υποθέσεις για την f;

<u>Πρόβλημα 2</u>

Έστω ότι η $S(f,x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)e^{ikx}$ συγκλίνει σ.π.

Είναι ίση με την f; Δηλαδή, $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)e^{ikx}$ σ.π.;

<u>Βασική ιδέα:</u>

Τα δύο ερωτήματα έχουν (προφανώς) καταφατική απάντηση αν $f=p=$ τριγ. πολυώνυμο και "τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L_1(T)$".

Θεώρημα

Έστω $f \in L_1(T)$

Τότε, $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει τριγ. πολυώνυμο $p_\varepsilon : \|f - p_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$,

δηλαδή $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - p_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon$.

Απόδειξη:

Βήμα 1: Είναι γνωστό ότι υπάρχει συνάρτηση g_ε: $\|f - g_\varepsilon\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ η οποία είναι συνεχής.

Βήμα 2: Έστω $g : T \to \mathbb{C}$ συνεχής.

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τριγ. πολυώνυμο p: $\|g - p\|_\infty < \varepsilon$.

Τότε: $\|g - p\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - p(x)|\, dx \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|g - p\|_\infty\, dx =$

$= \|g - p\|_\infty < \varepsilon$.

Από τα βήματα 1 και 2, $\forall f \in L_1(T)$ βρίσκουμε g_ε και μετά p_ε: $\|f - p_\varepsilon\|_1 \le \|f - g_\varepsilon\|_1 + \|g_\varepsilon - p_\varepsilon\|_1 \le \|f - g_\varepsilon\|_1 + \|g_\varepsilon - p_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon + \varepsilon$ ∎

Για το βήμα 2:

Λήμμα (προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass)

Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ ώστε $\|g - p\|_\infty = \max\{|g(x) - p(x)| : x \in [a, b]\} < \varepsilon$.

Λήμμα

Έστω $f : T \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο T: $\|f - T\|_\infty < \varepsilon$

Απόδειξη:

Υποθέτουμε πρώτα ότι η $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια.

Θεωρούμε την $\underset{[-1,1]}{\underset{\Uparrow}{y}} \longmapsto \underset{[0,\pi]}{\underset{\Uparrow}{\arccos y}}$.

Ορίζουμε $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με $g(y)=f(\arccos y)$

Η g είναι συνεχής.

Έστω $\varepsilon>0$.

Υπάρχει αλγεβρικό πολυώνυμο p:

$\forall y\in[-1,1] \quad |g(y)-(y)|<\varepsilon$

Ορίζουμε $T(x)=p(\cos x)$.

Ισχυρισμός 1: Το T είναι άρτιο τριγ. πολυώνυμο.

Ισχυρισμός 2: $\forall x\in[0,\pi] \ \exists y\in[-1,1]: x=\arccos y \Leftrightarrow \cos x = y$

και $|f(x)-T(x)|=|g(\cos x)-p(\cos x)|<\varepsilon$. ■

Άσκηση

Αν $f\in L_\infty(T)$, τότε $\forall\, 1\le p<q\le\infty \quad \|f\|_p\le\|f\|_q\le\|f\|_\infty$

και $\lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$.